Grafos Hamiltonianos

$val(v) =$ valência de $v \cong g(v) =$ grau de v

suficientes

5. CLASSIFICAÇÃO DAS CONDIÇÕES

Nesta seção faremos a classificação das condições suficientes que enunciamos a seguir e que foram estudadas nas seções anteriores. Para facilitar as referências vamos numerar as condições, todas elas referentes a um grafo G de ordem $n \geq 3$.

C1: condição de Dirac

$\forall v \in VG, \; val(v) \geq \frac{n}{2}$.

C2: condição de Ore

$\forall u, v \in VG, \; \{u,v\} \notin EG \implies val(u) + val(v) \geq n$.

C3: condição de Pósa

a) $\forall i, \; 1 \leq i < \frac{n-1}{2}$, o número de vértices de valência $\leq i$ é $< i$;

b) se n é ímpar, o número de vértices de valência $\leq \frac{n-1}{2}$ é $\leq \frac{n-1}{2}$.

C4: condição de Bondy-69

(supondo $val(v_1) \leq val(v_2) \leq \ldots \leq val(v_n)$)

$$\left.\begin{array}{l} i \neq j \\ val(v_i) \leq i \\ val(v_j) \leq j \end{array}\right\} \implies val(v_i) + val(v_j) \geq n.$$

C5: <u>condição de Bondy-70</u>

(supondo $val(v_1) \leq val(v_2) \leq \ldots \leq val(v_n)$)

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ val(v_i) \leq i \\ val(v_j) \leq j-1 \end{array}\right\} \Longrightarrow val(v_i) + val(v_j) \geq n.$$

C6: <u>condição de Chvátal</u>

(supondo $val(v_1) \leq val(v_2) \leq \ldots \leq val(v_n)$)

$$val(v_i) \leq i < \frac{n}{2} \Longrightarrow val(v_{n-i}) \geq n-i.$$

C7: <u>condição de Las Vergnas-70</u>

existe uma indexação $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de VG tal que

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ val(v_i) \leq i \\ val(v_j) \leq j \\ \{v_i, v_j\} \notin EG \end{array}\right\} \Longrightarrow val(v_i) + val(v_j) \geq n.$$

C8: <u>condição de Las Vergnas-71</u>

existe uma indexação $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de VG tal que

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ i+j \geq n \\ val(v_i) \leq i \\ val(v_j) \leq j-1 \\ \{v_i, v_j\} \notin EG \end{array}\right\} \Longrightarrow val(v_i) + val(v_j) \geq n.$$

C9: <u>condição de Bondy-Chvátal</u>

o fecho de G é completo.

C10: <u>condição de Skupień</u>

existe $L \subseteq VG$ tal que

(a) $\forall W \subset VG$ $S1(W)$ implica que $W \cap L \neq \emptyset$,

(b) $\forall u,v \in L$, $u \neq v$, se $\{u,v\} \notin EG$ então $val(u)+val(v) \geq n$.

$S1(W)$: existe $x \in W$: $W = \phi(\Gamma x)$ onde ϕ é uma injeção admissível de $\Gamma x \longrightarrow \Gamma^2 x$, $W \subseteq V(val(x))$ e $W \cup \Gamma W \neq VG$.

$V(val(x)) = \{v \in VG: val(v) \leq val(x)\}$.

C11:

existe uma partição das arestas de G em subgrafos completos pares tal que cada vértice pertence a exatamente dois desses subgrafos.

C12:

G é conexo e existe uma partição das arestas de G em subgrafos completos tal que cada vértice pertence a exatamente dois desses subgrafos e G contém um circuito tendo exatamente uma aresta em cada um desses subgrafos.

C13:

$\kappa(G) \geq \beta(G)$.

C14:

G é 2-conexo e G não tem θ-subgrafo.

C15:

G conexo, $\delta(G) \geq 2$ e G não tem subgrafo isomorfo a $K_{1,3}$ ou $K_{1,3}+\alpha$.

No que segue iremos justificar o seguinte diagrama:

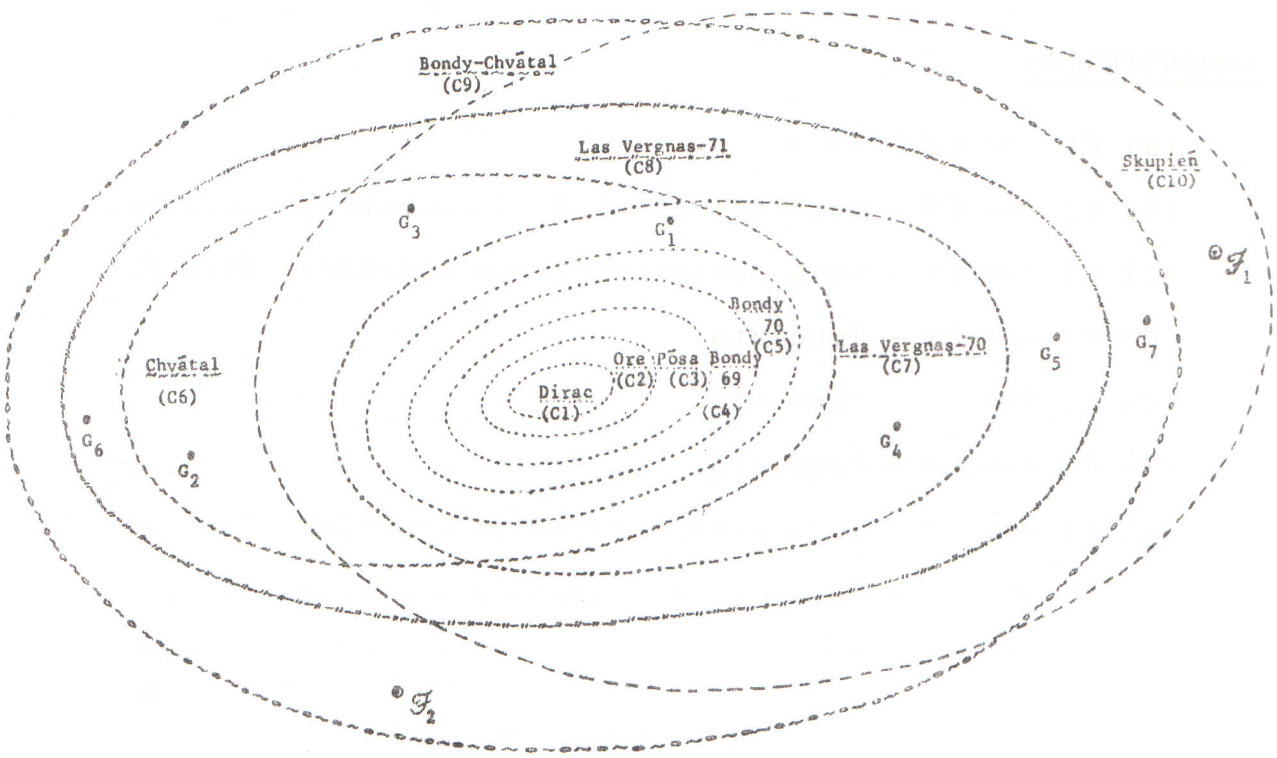

Figura 21

Note que no diagrama apresentamos todas as condições do tipo 1 (C1 a C9) e a condição de Skupień (C10). Isso foi feito pelo fato de a condição C7 de Las Vergnas-70, quando formulada de uma outra maneira equivalente (C7'), ter permitido concluir facilmente a relação que existe entre C7 e C10.

PROPOSIÇÃO 5.1

$$C1 \Longrightarrow C2 \Longrightarrow C3 \Longrightarrow C4 \Longrightarrow C5 \Longrightarrow C7 \Longrightarrow C8 \Longrightarrow C9 \text{ e}$$

$$C5 \Longrightarrow C6 \Longrightarrow C8.$$

DEMONSTRAÇÃO

(a) $C1 \Longrightarrow C2$ - Imediato.

(b) $C2 \Longrightarrow C3$ - Veja demonstração do corolário II.2.10.

(c) $C3 \Longrightarrow C4$ - Veja demonstração do corolário II.2.9.

(d) $C4 \Longrightarrow C5$ - Imediato.

(e) $C5 \Longrightarrow C7$ - Imediato.

(f) $C7 \Longrightarrow C8$ - Imediato.

(g) $C8 \Longrightarrow C9$ - Veja demonstração do corolário II.2.4.

(h) $C5 \Longrightarrow C6$ - Veja demonstração do corolário II.2.7.

(i) $C6 \Longrightarrow C8$ - Veja demonstração do corolário II.2.6. ∎

Mostraremos a seguir que a condição C7 é equivalente à seguinte condição C7'. (Veja [LV2])

C7': $\exists L \subseteq V G$ tal que