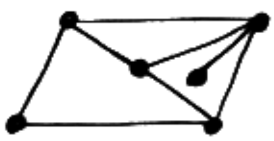
Cap 8 – Grafos Planares

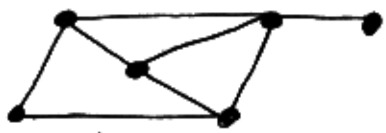
1. Conceitos Básicos

Um grafo G é *planar* se pode ser desenhado no plano de modo que suas arestas não se intersectam, exceto num extremo em comum. Um tal desenho no plano é chamado uma *imersão plana* ou *representação plana* ou um *mapa* de G. Dizemos também que G é *imersível no plano*.

Um *grafo plano* é um grafo planar que está imerso no plano.



grafo plano G_1



grafo plano G_2

Representações planas de um mesmo grafo G.

Dado um grafo plano G, removendo-se todas as curvas e os pontos que representam as arestas e os vértices de G, o que resta são regiões conexas, chamadas *faces*. Note que uma face é ilimitada. Tal face é chamada *face externa* (ou *infinita*). Os grafos planos G_1 e G_2 têm 4 faces.

A *fronteira* de uma face é o passeio fechado formado pelas arestas e vértices no fecho da face. Um circuito de um grafo plano é chamado *circuito facial* se é fronteira de uma face.

Dizemos que duas imersões planas são *equivalentes* se a fronteira de uma face em uma imersão sempre corresponde à fronteira de uma face em outra imersão.

As imersões planas G_1 e G_2 não são equivalentes: a fronteira da face externa de G_2 não corresponde à fronteira de nenhuma face de G_1.

Dizemos que um grafo tem uma <u>única</u> imersão plana quando todas as suas imersões planas são equivalentes.
Ex: K_4 tem uma única imersão plana.

(FATO: Grafos planares 3-conexos têm uma única imersão plana.)

<u>Curva de Jordan</u>: curva contínua que não se auto-intersecta e cujo início coincide com o seu término.

Ex:

Se J é uma curva de Jordan, então J divide o plano em duas regiões: o interior de J (int J) e o exterior de J (ext J).

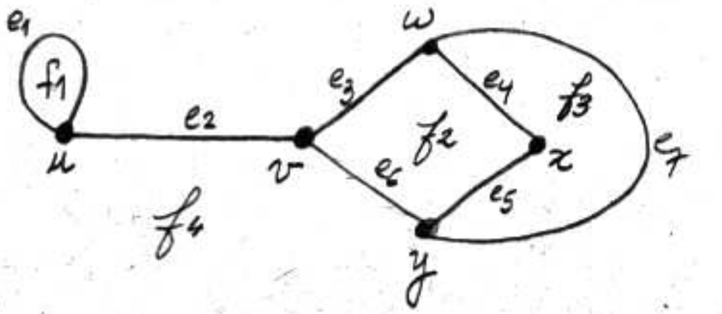
<u>TEOREMA DE JORDAN</u>: Se J é uma curva de Jordan, então dado um ponto <u>u</u> em int(J) e um ponto <u>v</u> em ext(J), qualquer curva ligando <u>u</u> a <u>v</u> deve intersectar J em algum ponto.

Usando esse teorema, podemos provar que os grafos K_5 e $K_{3,3}$ não são planares. (Veremos mais tarde uma outra prova.)

<u>TEOREMA 8.1</u>: O grafo K_5 não é planar.

<u>TEOREMA 8.2</u>: O grafo $K_{3,3}$ não é planar.

2. Grafo Dual



Fronteira de f_1 : (u, e_1, u)

" " f_3 : $(w, e_7, y, e_5, x, e_4, w)$

" " f_4 : $(u, e_1, u, e_2, v, e_3, w, e_7, y, e_6, v, e_2, u)$

(arestas-de-corte ocorrem 2 vezes)

Dizemos que uma face é incidente aos vértices e arestas na sua fronteira. Se α é uma aresta-de-corte ou um laço, então apenas uma face é incidente a α. Se α não é uma aresta-de-corte e nem um laço, então há exatamente duas faces incidentes a α, e neste caso dizemos que α separa essas faces. Ex: a aresta e_4 separa as faces f_2 e f_3.

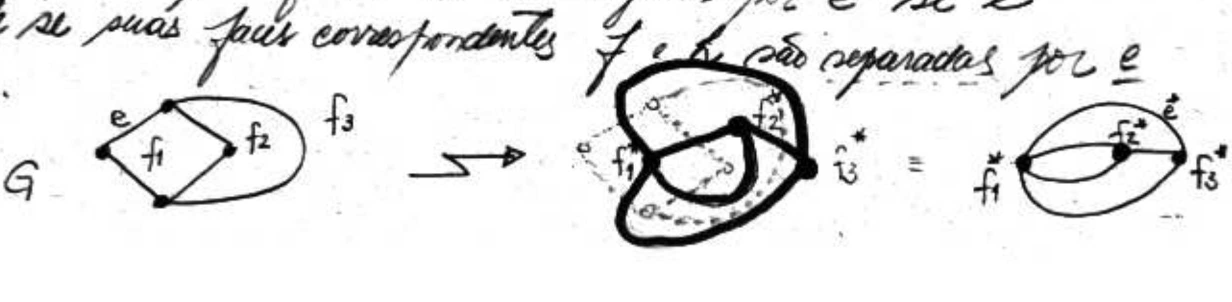
O grau de uma face f, $gr(f)$, é o número de arestas incidentes a f, onde arestas-de-corte são contadas duas vezes.

Ex: $gr(f_1) = 1$, $gr(f_3) = 3$, $gr(f_4) = 6$.

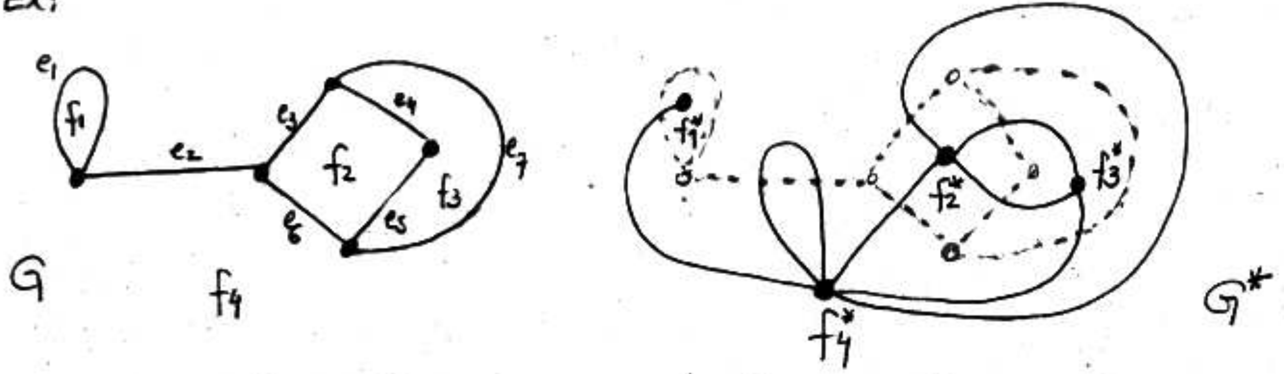
Seja G um grafo plano. Definimos o dual de G, denotado por G^*, da seguinte maneira.

(a) a cada face f de G fazemos corresponder um vértice f^* de G^*;

(b) a cada aresta e de G fazemos corresponder uma aresta e^* em G^*, sendo que f^* e h^* são ligados por e^* se e somente se suas faces correspondentes f e h são separadas por e em G.



Ex:



$\underline{e}$ aresta-de-corte em $G \rightarrow e^*$ laço em G^*

$\underline{e}$ laço em $G \longrightarrow e^*$ aresta-de-corte em G^*

<u>IMPORTANTE</u>: O conceito de grafo dual só faz sentido p/ grafo plano.

OBS: Um grafo planar pode ter representações planas distintas cujos duais não são isomorfos.
Vejam como são os duais desses mapas.

<u>FATO</u>: Se G é um grafo plano, então G^* é um grafo planar.

<u>Notação</u>: $F(G)$ denota o conjunto das faces de G (um grafo plano).

Da definição de G^* segue que

$$|V(G^*)| = |F(G)|,$$

$$|A(G^*)| = |A(G)|,$$

e $g(f^*) = gr(f)$ para toda face $f \in F(G)$.

<u>TEOREMA 8.3</u>:

Se G é um grafo plano, então $\sum_{f \in F(G)} gr(f) = 2|A(G)|$.

TEOREMA 8.4 (FÓRMULA DE EULER) Euler, 1750

Se G é um grafo plano conexo, então
$$|V(G)| - |A(G)| + |F(G)| = 2.$$

COROLÁRIO 8.5

Todas as representações planas de um dado grafo planar conexo têm o mesmo número de faces.

COROLÁRIO 8.6

Se G é um grafo planar simples com $n \geq 3$ vértices e m arestas, então $m \leq 3n-6$.

COROLÁRIO 8.7

Todo grafo planar simples tem um vértice de grau no máximo 5.

COROLÁRIO 8.8

Se G é um grafo planar bipartido, simples, com $n \geq 3$ vértices e m arestas, então $m \leq 2n-4$.

COROLÁRIO 8.9

O grafo K_5 não é planar.

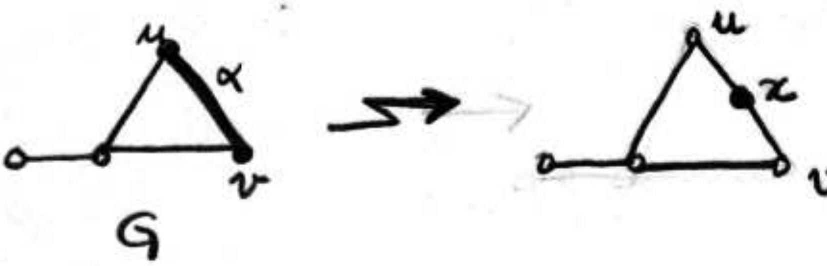
COROLÁRIO 8.10

O grafo $K_{3,3}$ não é planar.

(Todas as provas serão vistas nas aulas.)

Subdivisão de aresta / Subdivisão de um grafo

Def. A operação de subdivisão de uma aresta $\alpha = \{u, v\}$ de um grafo G consiste em remover α de G e substituí-la por um caminho $P = (u, x, v)$, onde x é um vértice novo (não pertencente a G).



Def. Uma subdivisão de um grafo G é um grafo que pode ser obtido de G por uma sequência de $k \geq 0$ subdivisões de arestas

Ex: Uma subdivisão de K_4: