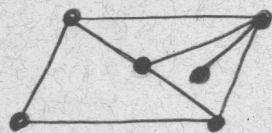


Cap. 8 - Grafos Planares

1. Conceitos Básicos

Um grafo G é planar se pode ser desenhado no plano de modo que suas arestas não se intersectam, exceto num extremo em comum. Um tal desenho no plano é chamado uma imersão plana ou representação plana ou um mapa de G . Dizemos também que G é imersível no plano.

Um grafo plano é um grafo planar que está imerso no plano.



grafo plano G_1

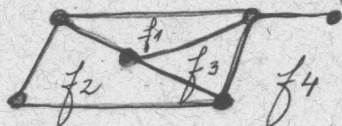


grafo plano G_2

Representações planas de um mesmo grafo G .

Dado um grafo plano G , removendo-se todas as curvas e os pontos que representam as arestas e os vértices de G , o que resta são regiões conexas, chamadas faces.

Note que uma face é ilimitada. Tal face é chamada face externa (ou infinita). Os grafos planos G_1 e G_2 têm 4 faces.



A fronteira de uma face é o passeio fechado formado pelas arestas e vértices no fecho da face. Um circuito de um grafo plano é chamado circuito facial se é fronteira de uma face.

Dizemos que duas imersões planas são equivalentes se a fronteira de uma face em uma imersão sempre corresponde à fronteira de uma face em outra imersão.

As imersões planas G_1 e G_2 não são equivalentes: a fronteira da face externa de G_2 não corresponde à fronteira de nenhuma face de G_1 .

Dizemos que um grafo tem uma única imersão plana quando todas as suas imersões planas são equivalentes.

EX: K_4 tem uma única imersão plana.



(FATO: Grafos planares 3-conexos têm uma única imersão plana.)

Curva de Jordan: curva contínua que não se auto-intersecta e cujo início coincide com o seu término.

ex.



Se J é uma curva de Jordan, então J divide o plano em duas regiões: o interior de J ($int J$) e o exterior de J ($ext J$).

TEOREMA DE JORDAN: Se J é uma curva de Jordan, então dado um ponto u em $int(J)$ e um ponto v em $ext(J)$, qualquer curva ligando u a v deve intersectar J em algum ponto.



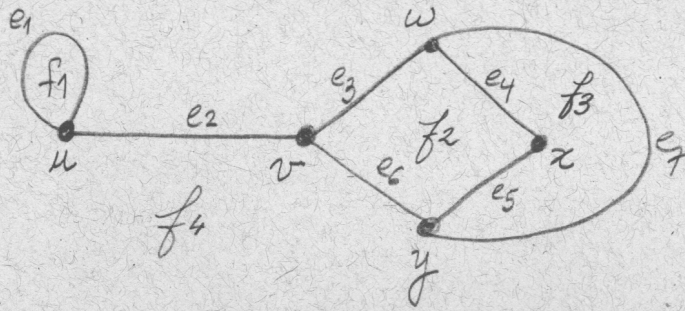
Usando esse teorema, podemos provar que os grafos K_5 e $K_{3,3}$ não são planares. (Veremos mais tarde uma outra prova.)

TEOREMA 8.1. O grafo K_5 não é planar.

TEOREMA 8.2. O grafo $K_{3,3}$ não é planar.

2. Grafo Dual

8.3



Fronteira de f_1 : (u, e_1, u)
 " " f_3 : $(w, e_7, y, e_5, x, e_4, w)$
 " " f_4 : $(u, e_1, u, e_2, v, e_3, w, e_7, y, e_6, v, e_2, u)$
 (arestas-de-corte ocorrem 2 vezes)

Dizemos que uma face é incidente aos vértices e arestas na sua fronteira. Se α é uma aresta-de-corte ou um laço, então apenas uma face é incidente a α . Se α não é uma aresta-de-corte e nem um laço, então há exatamente duas faces incidentes a α , e neste caso dizemos que α separa essas faces. Ex: a aresta e_4 separa as faces f_2 e f_3 .

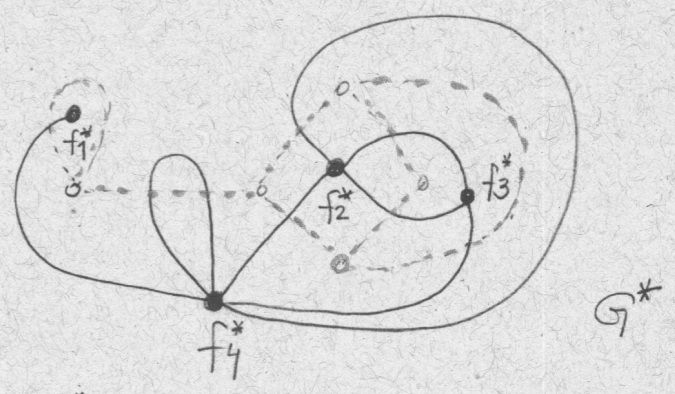
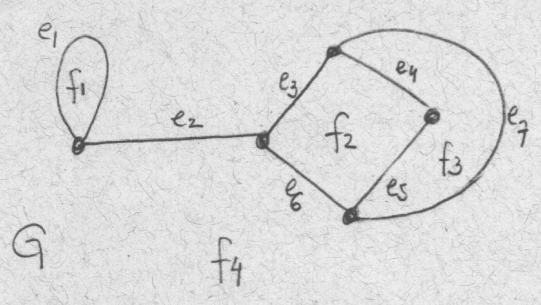
O grau de uma face f , $gr(f)$, é o número de arestas incidentes a f , onde arestas-de-corte são contadas duas vezes.
 Ex: $gr(f_1) = 1$, $gr(f_3) = 3$, $gr(f_4) = 6$.

Seja G um grafo plano. Definimos o dual de G , denotado por G^* , da seguinte maneira.

- A cada face f de G fazemos corresponder um vértice f^* de G^* ;
- A cada aresta e de G fazemos corresponder uma aresta e^* em G^* , sendo que f^* e h^* são ligados por e^* se e somente se suas faces correspondentes f e h são separadas por e em G .



Ex:

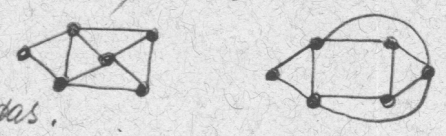


- e aresta-de-corte em $G \rightarrow e^*$ laço em G^*
- e laço em $G \rightarrow e^*$ aresta-de-corte em G^*

IMPORTANTE: O conceito de grafo dual só faz sentido p/1 grafo plano.

OBS: Um grafo planar pode ter representações planas distintas cujos duais não são isomorfos.

Vejam como são os duais desses mapas.



FATO: Se G é um grafo plano, então G^* é um grafo planar.

Notação: $F(G)$ denota o conjunto das faces de G (um grafo plano).

Da definição de G^* segue que

$$|V(G^*)| = |F(G)|,$$

$$|A(G^*)| = |A(G)|,$$

$$e \quad g(f^*) = gr(f) \text{ para toda face } f \in F(G).$$

TEOREMA 8.3

Se G é um grafo plano, então $\sum_{f \in F(G)} gr(f) = 2|A(G)|$.

TEOREMA 8.4 (FÓRMULA DE EULER) Euler, 1750

85

Se G é um grafo plano conexo, então

$$|V(G)| - |A(G)| + |F(G)| = 2.$$

COROLÁRIO 8.5

Todas as representações planas de um dado grafo planar conexo têm o mesmo número de faces.

COROLÁRIO 8.6

Se G é um grafo planar simples com $n \geq 3$ vértices e m arestas, então $m \leq 3n - 6$.

COROLÁRIO 8.7

Todo grafo planar simples tem um vértice de grau no máximo 5.

COROLÁRIO 8.8

Se G é um grafo planar bipartido, simples, com $n \geq 3$ vértices e m arestas, então $m \leq 2n - 4$.

COROLÁRIO 8.9

⊙ grafo K_5 não é planar.

COROLÁRIO 8.10

⊙ grafo $K_{3,3}$ não é planar.

(Todas as provas serão vistas nas aulas.)

Subdivisão de aresta / Subdivisão de um grafo

Def. A operação de subdivisão de uma aresta $\alpha = \{u, v\}$ de um grafo G consiste em remover α de G e substituí-la por um caminho $P = (u, x, v)$, onde x é um vértice novo (não pertencente a G).



Def. Uma subdivisão de um grafo G é um grafo que pode ser obtido de G por uma sequência de $k \geq 0$ subdivisões de arestas

Ex: Uma subdivisão de K_4 :

