TEOREMA (Brooks, 1941)

Seja G um grafo conexo. Se G não é completo e nem um circuito ímpar, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Prova. Por indução em $|V(G)|$. Seja $\Delta := \Delta(G)$.

- Se $\Delta \leq 2$ então G é um caminho ou um circuito, e a asserção é trivial. Vamos então supor que $\Delta \geq 3$ e que a asserção valha para grafos de ordem menor do que a de G.

Suponha que $\chi(G) > \Delta$.

Seja v um vértice de grau Δ. Então $H := G - v$ é tal que $\chi(H) \leq \Delta$. De fato, pela HI, para todo componente H' de H temos que

$\chi(H') \underset{HI}{\leq} \Delta(H') \leq \Delta$, a menos que H' seja completo ou um circuito ímpar, caso em que

$$\chi(H') = \Delta(H') + 1 \leq \Delta.$$

Como H tem uma Δ-coloração, mas G não, temos que

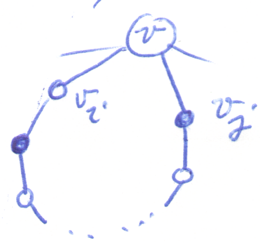
Toda Δ-coloração de H usa todas as cores $1, 2, \ldots, \Delta$ nos vizinhos de v. (1)

Dada uma Δ-coloração de H, denote por v_i o vizinho de v colorido com a cor i $(i = 1, \ldots, \Delta)$. Para todo $i \neq j$ seja

H_{ij} o subgrafo de H gerado pelos vértices com as cores i ou j.

Para todo $i \neq j$, os vértices v_i e v_j pertencem a um mesmo componente C_{ij} de H_{ij}. (2)

De fato, senão poderíamos permutar as cores i e j em um dos componentes de H_{ij}, e teríamos uma Δ-coloração de H na qual v_i e v_j receberiam a mesma cor, contrariando (1).



Afirmamos que

C_{ij} é um caminho de v_i a v_j. (3)

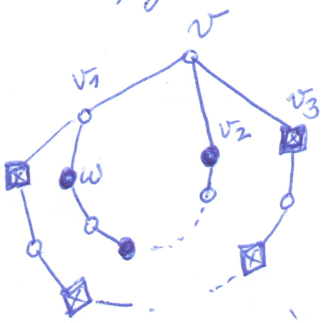
De fato, seja P um caminho de v_i a v_j. Claramente, os vizinhos de v_i em H têm cores 2 a 2 distintas. Caso contrário, poderíamos recolorir v_i, contrariando (1). O mesmo vale para v_j. Logo, se $P \neq C_{ij}$, existe um vértice em P com 3 vizinhos em H de mesma cor. Seja w um tal primeiro vértice em P. Como no máximo $\Delta-2$ cores são usadas nos vizinhos de w, podemos atribuir uma cor diferente a w e obter uma nova Δ-coloração de H. Com essa nova coloração, o correspondente subgrafo H_{ij} contradiz (2), e portanto contradiz (1). [Note que a secção de P que vai de v_i ao predecessor de w (em P) é um componente de H_{ij} que contradiz (2).]

Afirmamos que

$$\boxed{\text{Para } i,j,k \text{ distintos, os caminhos } C_{ij} \text{ e } C_{ik} \text{ se intersectam apenas em } v_i.} \quad (4)$$

De fato, se existisse $w \neq v_i$, $w \in C_{ij} \cap C_{ik}$, então w teria 2 vizinhos com a cor j e 2 vizinhos com a cor k, o que nos permitiria recolorir w. Após essa recoloração, v_i e v_j ficariam em componentes distintos do correspondente subgrafo H_{ij}, contrariando (2).

- Se os vizinhos de v forem 2 a 2 adjac. teríamos que $G \cong K_{\Delta+1}$, contrariando a hipótese de que G não é completo.
- Spg vamos então supor que $v_1v_2 \notin A(G)$.



Considere o caminho $C_{1,2}$ e seja w o vizinho de v_1 em $C_{1,2}$. Considere o caminho $C_{1,3}$. Permute as cores $\underline{1}$ e $\underline{3}$ no caminho $C_{1,3}$ e obtenha uma nova coloração de H, digamos C'.

Sejam v_i', H_{ij}', C_{ij}' definidos analogamente em relação à coloração C'. Considere os caminhos $C'_{1,2}$ e $C'_{2,3}$. Neste caso, $w \in C'_{1,2} \cap C'_{2,3}$, contrariando (4), relativamente à coloração C'.

[OBS: $C'_{23} \neq (v_1, v_2)$ já que não existe a aresta v_1v_2 em G.] ∎