Teorema 3.11. *Se T é um subgrafo construído pelo algoritmo de Kruskal, então T é uma árvore ótima de G.*

Prova. Seja T um subgrafo construído pelo algoritmo de Kruskal. Claramente T é um subgrafo acíclico maximal de G com $V(T) = V(G)$, e portanto, T é uma árvore geradora de G. Vamos provar que T é uma árvore ótima.

Suponha que $A(T) = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, e que e_i foi escolhido antes de e_j se $i < j$.

Escolha uma árvore ótima T^* de G tal que T^* tenha o maior número possível de arestas em comum com T (isto é, tal que $|A(T^*) \cap A(T)|$ seja máxima). Vamos provar que $T^* = T$.

Suponha que $T^* \neq T$. Seja e_j a primeira aresta escolhida para pertencer a T que não é uma aresta de T^*. (Isto significa que as arestas $e_1, \ldots, e_{j-1}$ pertencem a T e a T^*). Sejam u e v os extremos da aresta e_j, e seja P o (único) caminho em T^* que vai de u para v. Note que o caminho P tem pelo menos uma aresta, digamos xy, que não pertence a T (caso contrário, T conteria um circuito). Como a aresta uv $(= e_j)$ foi escolhida pelo algorimto e xy não foi, segue que $c(xy) \geq c(uv)$. De fato, basta notar que $G[\{e_1, \ldots, e_{j-1}\} \cup \{xy\}]$ é acíclico, e portanto, se tivéssemos $c(xy) < c(uv)$, então a aresta xy deveria ter sido escolhida pelo algoritmo.

Seja $T' := T^* + uv - xy$; Note que T' é uma árvore geradora [justifique esta afirmação] e $c(T') = c(T^*) + c(uv) - c(xy) \leq c(T^*)$. Como T^* é uma árvore ótima, então $c(T') = c(T^*)$, e portanto T' é também uma árvore ótima. Mas T' tem mais arestas em comum com T do que T^* (isto é, $|A(T') \cap A(T)| > |A(T^*) \cap A(T)|$), uma contradição à escolha de T^*. Logo, devemos ter $T^* = T$, o que completa a prova. ■