Teorema 2.1. *Um grafo conexo é euleriano se e só se cada um de seus vértices tem grau par.*

Prova. [Suficiência da condição] (Prova usando argumento de contraexemplo minimal.)

Vamos provar que se G é um grafo conexo tal que todos os seus vértices têm grau par, então G é euleriano.

Suponha que a afirmação seja falsa. Ou seja, suponha que existam grafos conexos, cujos vértices são todos de grau par, e que sejam não-eulerianos. Escolha um tal grafo G com o menor número possível de arestas (um contraexemplo minimal).

Como G é conexo e tem grau mínimo 2 (note que o grafo trivial não seria um contraexemplo), então G tem um circuito, e portanto G tem uma trilha fechada. [Veja a Proposição 1.5 do Capítulo 1.] Seja T uma trilha fechada de comprimento máximo em G. Como T não é uma trilha euleriana (pois, por hipótese, G não é euleriano), T não contém todas as arestas de G. Assim, o grafo $G' = G - A(T)$ tem arestas. Assim, existe (pelo menos) um componente em G' que tem arestas (note que, G' pode ser desconexo e ter componentes que são vértices isolados). Considere um componente G^* de G' que tem arestas. Claramente, em G^* todos os vértices têm grau par. Portanto, como G^* é conexo, e todos os seus vértices têm grau par, segue que G^* é euleriano, pois caso contrário, G^* seria um contraexemplo menor que G (contradizendo a escolha de G). Assim, considere uma trilha euleriana fechada, digamos T^* em G^*.

Como G é conexo, existe um vértice v tal que $v \in V(T) \cap V(T^*)$. Sem perda de generalidade, suponha que v é a origem (e o término) de T e de T^*. Neste caso, $T.T^*$ é uma trilha fechada em G de comprimento maior do que o de T, uma contradição. Logo, não existe um contraexemplo para a afirmação do teorema, e com isso completamos a prova do teorema.

Corolário 2.2. *Um grafo conexo tem uma trilha euleriana se e só se tem no máximo 2 vértices de grau ímpar.*

Prova. [na aula]

Corolário 2.3. *Seja G um grafo conexo com $2k \geq 2$ vértices de grau ímpar. Então G tem k trilhas (abertas) $T_1, T_2, \ldots, T_k$ duas a duas disjuntas nas arestas e tais que $A(T) = A(T_1) \cup A(T_2) \cup \ldots \cup A(T_k)$.*

Prova. Chame de $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$ os vértices de grau ímpar de G. Para $i = 1, 2, \ldots, k$, seja $\alpha_i = \{v_i, v_{k+i}\}$ uma aresta não pertencente a G. Considere o grafo $G' = G + \{\alpha_i : i = 1, 2, \ldots, k\}$. Claramente, G' é conexo e todos os seus vértices têm grau par. Portanto, pelo Teorema 2.1, G' é euleriano. Seja T uma trilha euleriana fechada de G. Chame de $T_1, T_2, \ldots, T_k$ as k seções de T que são obtidas ao remover de T o conjunto de arestas $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$. Note que as arestas α_i, para $i = 1, 2, \ldots, k$, são duas a duas independentes em G', e portanto não ocorrem consecutivamente em T. Claramente, cada T_i é uma trilha em G (que começa e termina num vértice de grau ímpar de G), além disso, $T_1, T_2, \ldots, T_k$ são duas a duas disjuntas nas arestas e $A(T) = A(T_1) \cup A(T_2) \cup \ldots \cup A(T_k)$.

Exercício 21. *Prove que um grafo conexo G é euleriano se e só se o conjunto das arestas de G pode ser particionado em circuitos.*

Denotamos por $\mathbf{c(G)}$ o número de componentes de G. Dizemos que uma aresta α de G é uma **aresta-de-corte** ou **ponte** se $c(G - \alpha) > c(G)$ (isto é, sua remoção aumenta o número de componentes).

Algoritmo de Fleury

Entrada: Grafo G com no máximo dois vértices de grau ímpar.
Saída: Trilha euleriana em G.

(P_1) Se G possui vértices de grau ímpar, seja v_o um tal vértice; senão, seja v_o um vértice qualquer. Faça $T_o = (v_o)$.

(P_2) Tendo escolhido a trilha $T_k = (v_o, a_1, v_1, \ldots, a_k, v_k)$, faça $G_k := G - \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Escolha em G_k uma aresta a_{k+1} incidente a v_k, dando preferência a uma que não seja ponte (se tal aresta não existir, escolha uma ponte). Seja $a_{k+1} = \{v_k, v_{k+1}\}$ e $T_{k+1} := T_k(v_k, a_{k+1}, v_{k+1})$. Repita o passo P_2 enquanto isto for possível.