Euler e as Origens da Teoria dos Grafos

Yoshiko Wakabayashi

Universidade de São Paulo - USP

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Ciência da Computação

5 de dezembro de 2007

Leonhard Euler

(1707 – 1783)

Leonhard Euler

Leonhard Euler

Conteúdo

- O problema das 7 pontes de Königsberg

Conteúdo

- O problema das 7 pontes de Königsberg
- Solução apresentada por Euler

Conteúdo

- O problema das 7 pontes de Königsberg
- Solução apresentada por Euler
- Um algoritmo

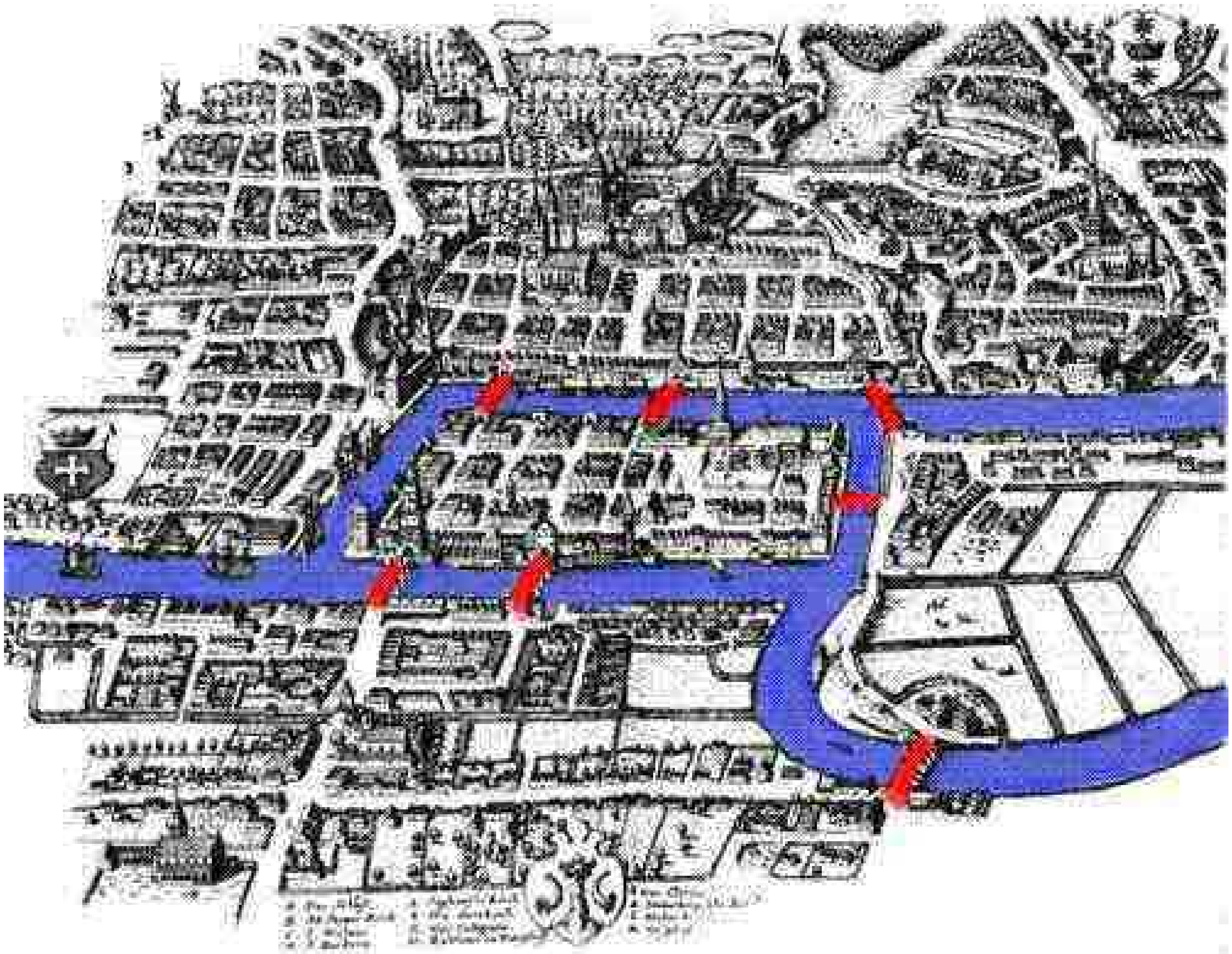
Conteúdo

- O problema das 7 pontes de Königsberg
- Solução apresentada por Euler
- Um algoritmo
- Outro problema correlato

Conteúdo

- O problema das 7 pontes de Königsberg
- Solução apresentada por Euler
- Um algoritmo
- Outro problema correlato
- Complexidade computacional: a questão P $\times$ NP

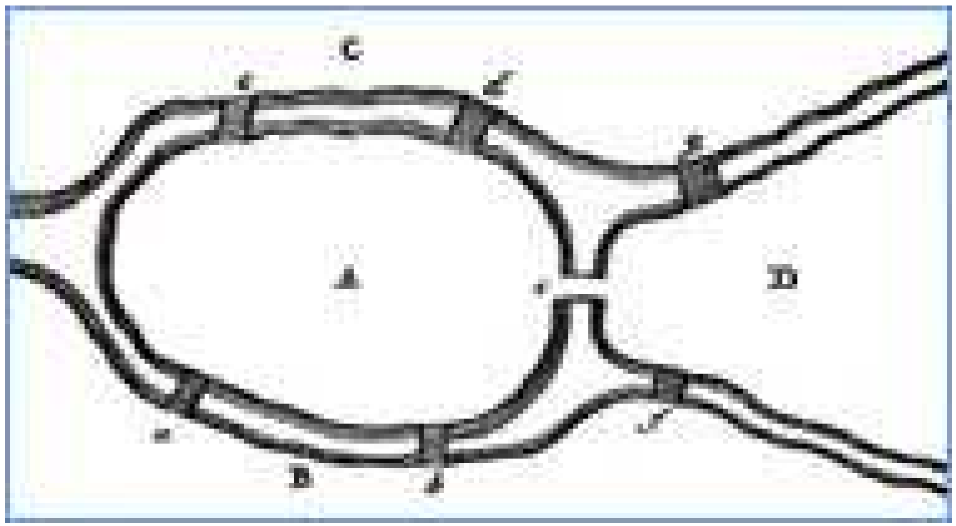
As 7 Pontes de Königsberg em 1736



Green, Merchant, Blacksmith, High, Wooden, Connecting, Honey

Problema das 7 Pontes de Königsberg

É possível encontrar uma trilha (passeio) que passa em cada uma das 7 pontes de Königsberg exatamente uma vez?



rio Pregel (atualmente, Pregolya)

O artigo de Euler

- 1736 - Euler apresentou um artigo à Academia de Ciências de St. Petersburgo (hoje, Leningrado), onde trabalhava desde 1727.

O artigo de Euler

- 1736 - Euler apresentou um artigo à Academia de Ciências de St. Petersburgo (hoje, Leningrado), onde trabalhava desde 1727.
- L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Comment. Acad. Sci. Imp. Petropol. 8 (1736), 128–140.

O artigo de Euler

- 1736 - Euler apresentou um artigo à Academia de Ciências de St. Petersburgo (hoje, Leningrado), onde trabalhava desde 1727.
- L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Comment. Acad. Sci. Imp. Petropol. 8 (1736), 128–140.

(Só publicado em 1741)

O artigo original

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula VIII.

Praeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates verſatur, et omni tempore ſummo ſtudio eſt exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam ſitus vocauit. Iſta pars ab ipſo in ſolo ſitu determinando, ſitusque proprietatibus eruendis occupata eſſe ſtatuitur; in quo negotio neque ad quantitates reſpiciendum, neque calculo quantitatum vtendum ſit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc ſitus Geometriam pertineant, et quali methodo in iis reſoluendis vti oporteat, non ſatis eſt definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio eſſet facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque ſolutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam ſitus referre haud dubitaui: praeſertim quod in eius ſolutione ſolus ſitus in conſiderationem veniat, calculus vero nullius prorſus ſit vſus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata

mata

Carta de Ehler a Euler

2. EHLER'S LETTER TO EULER

Carl Leonhard Gottlieb Ehler was mayor of Danzig, a friend of Euler, and a lover of mathematics. From 1735 to 1742 he corresponded with Euler in St. Petersburg [3, pp. 282–387], acting as an intermediary between Euler and Heinrich Kühn (1690–1769), professor of mathematics at the academic gymnasium in Danzig. Via Ehler, Kühn communicated with Euler about the Königsberg problem. In a letter dated March 9, 1736, Ehler wrote to Euler (see Figs. 1 and 2):

> You would render to me and our friend Kühn a most valuable service, putting us greatly in your debt, most learned Sir, if you would send us the solution, which you know well, to the problem of the seven Königsberg bridges, together with a proof. It would prove to be an outstanding example of the calculus of position [Calculi Situs], worthy of your great genius. I have added a sketch of the said bridges . . . .

It emerges from this letter that Ehler and Euler had already exchanged ideas on the Königsberg problem, but we have been unable to locate any earlier references.

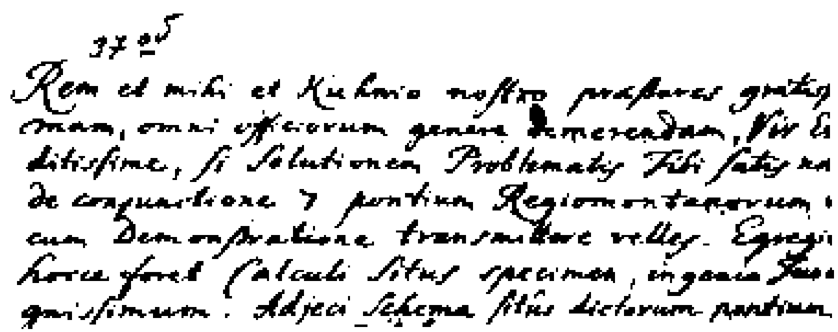


FIGURE 1

Carta de Ehler a Euler

EULER'S KÖNIGSBERG LETTERS 135

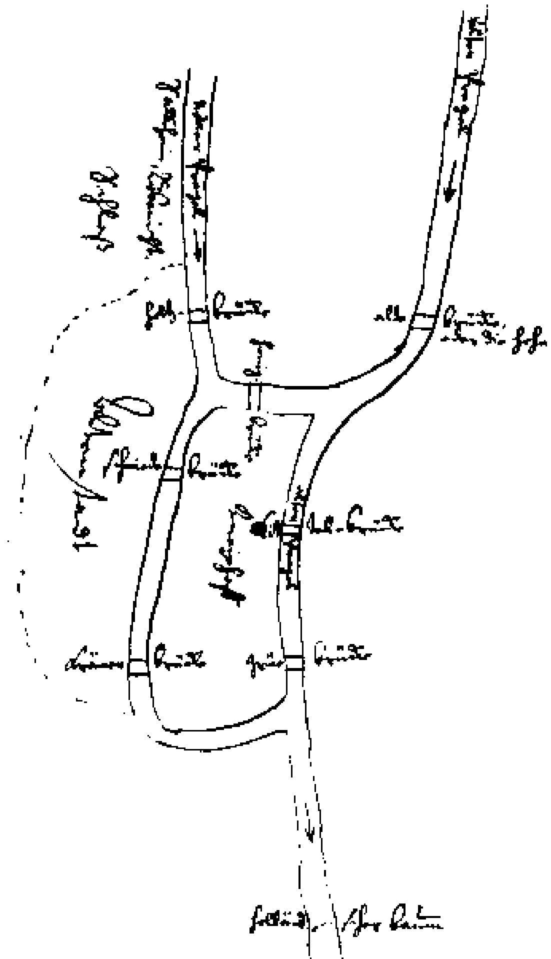


FIGURE 2

Carta de Euler a Ehler

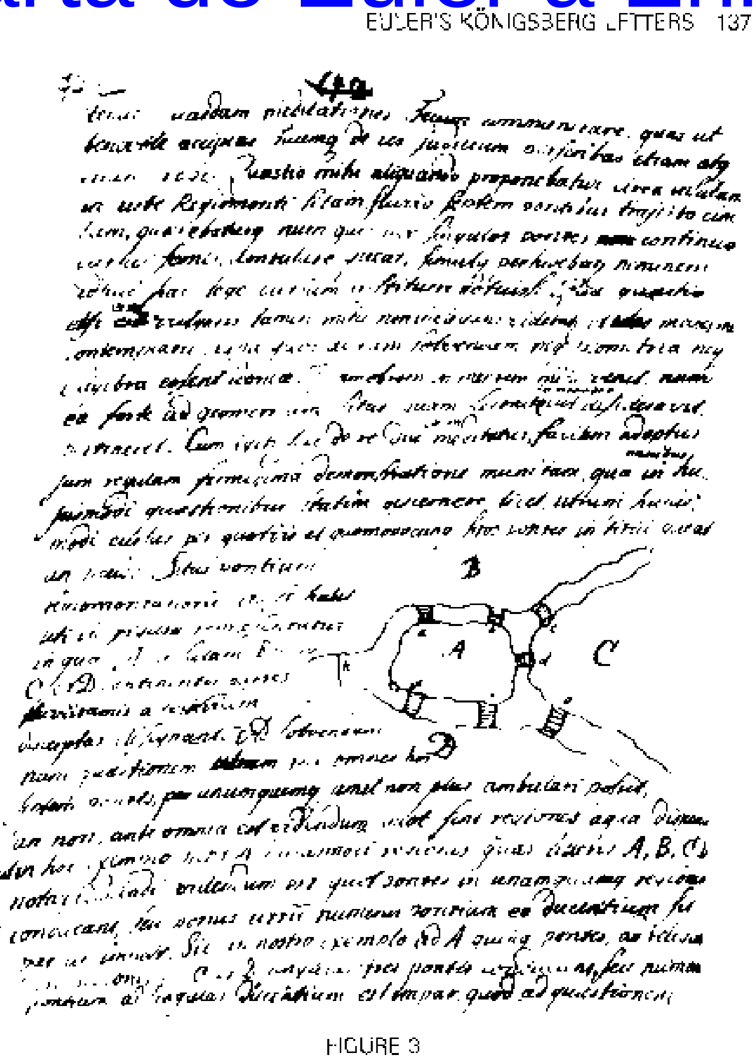
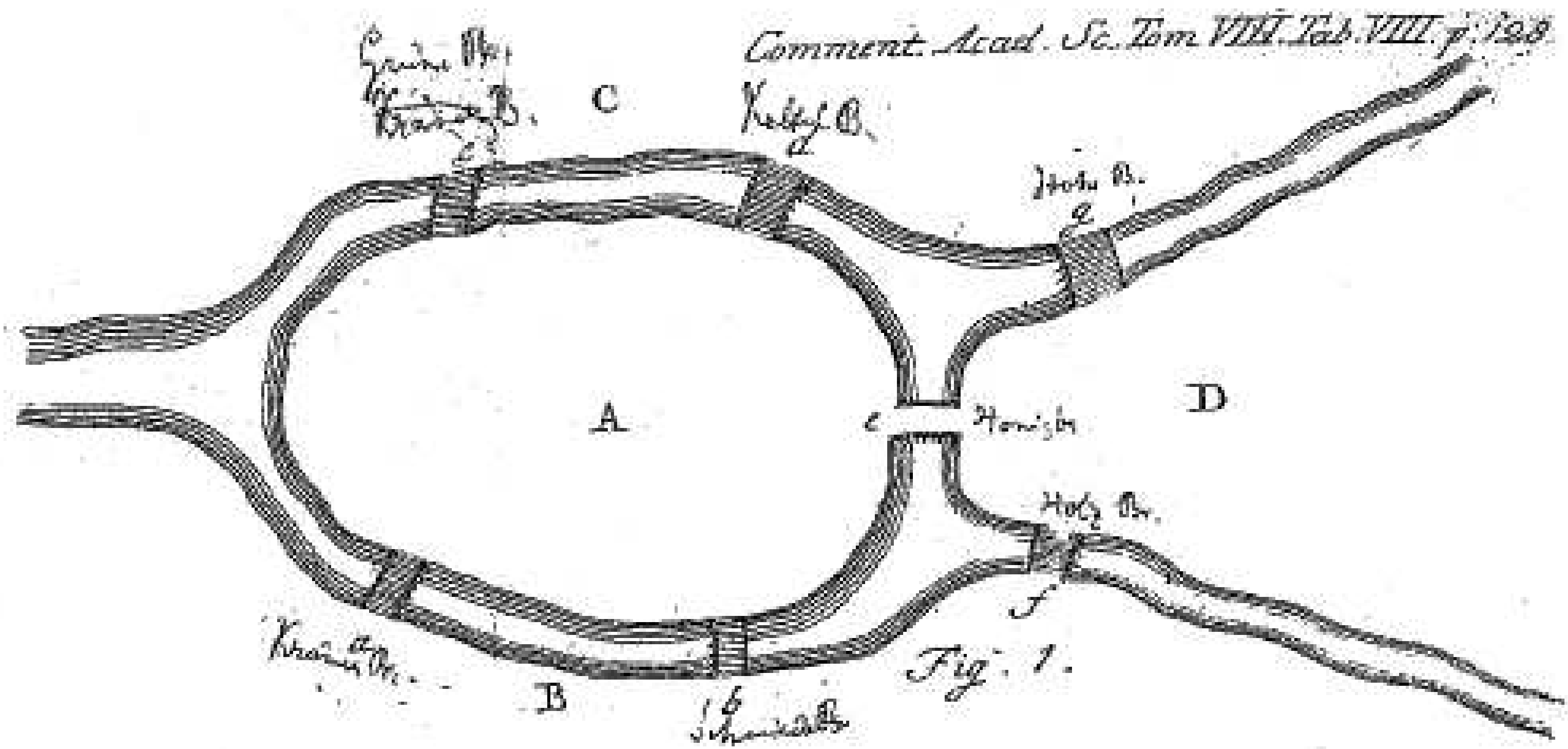


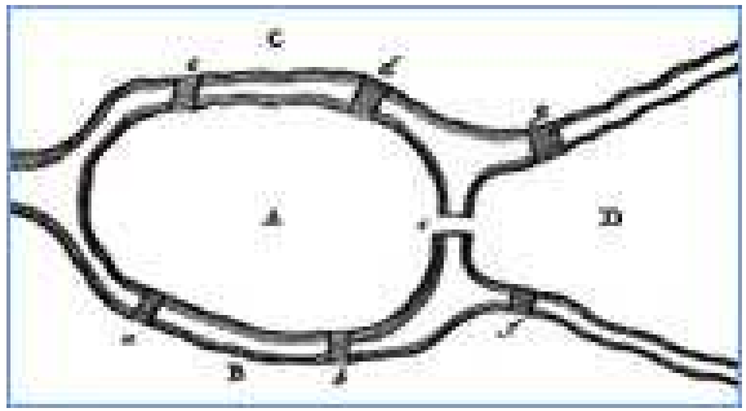
FIGURE 3

Desenho no artigo de Euler



Solução proposta por Euler

É possível encontrar uma trilha que passa em cada uma das 7 pontes de Königsberg exatamente uma vez?

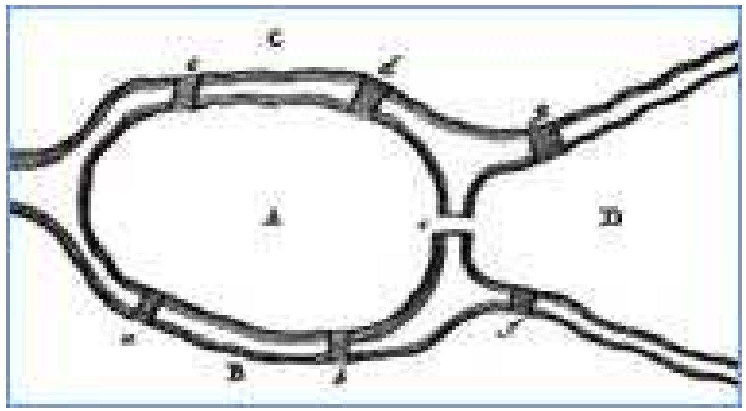


Regiões de terra: A, B, C, D

Solução: seqüência de letras A,B,C,D de comprimento 8 t.q.

Solução proposta por Euler

É possível encontrar uma trilha que passa em cada uma das 7 pontes de Königsberg exatamente uma vez?



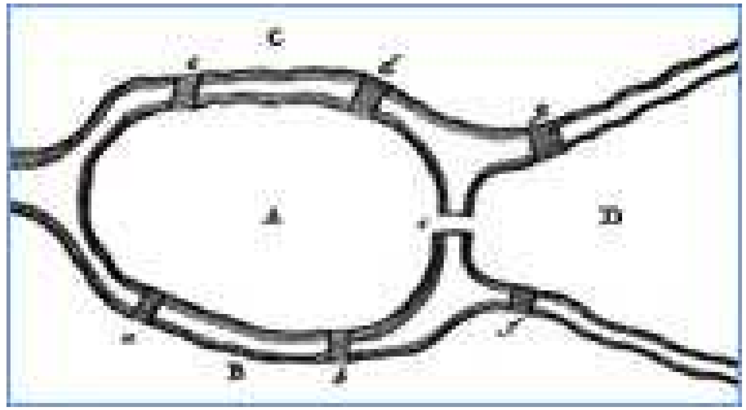
Regiões de terra: A, B, C, D

Solução: seqüência de letras A,B,C,D de comprimento 8 t.q.

– os pares A,B e A,C sejam adjacentes 2 vezes

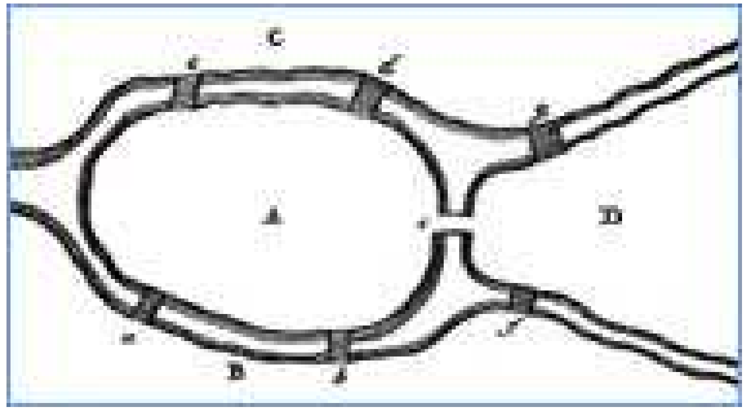
– os pares A,D e B,D e C,D sejam adjacentes 1 vez

Solução proposta por Euler



Contagem:

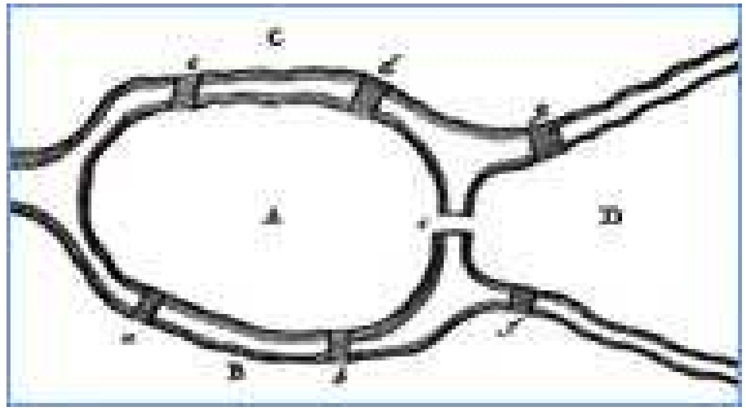
Solução proposta por Euler



Contagem:

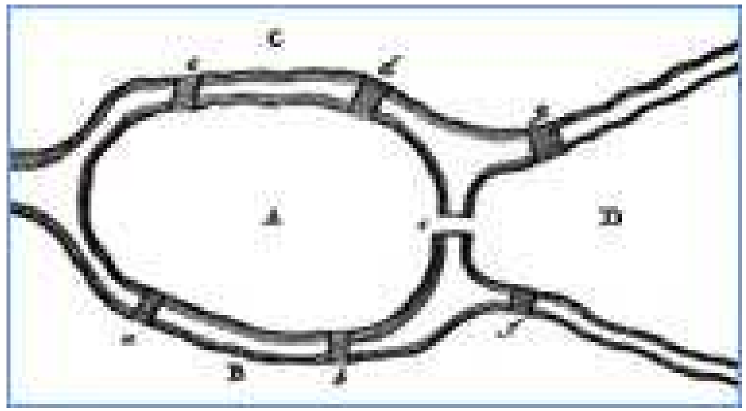
A é atingível por 5 pontes $\Longrightarrow$ A deve ocorrer 3 vezes

Solução proposta por Euler



Contagem:
A é atingível por 5 pontes $\Longrightarrow$ A deve ocorrer 3 vezes
B é atingível por 3 pontes $\Longrightarrow$ B deve ocorrer 2 vezes

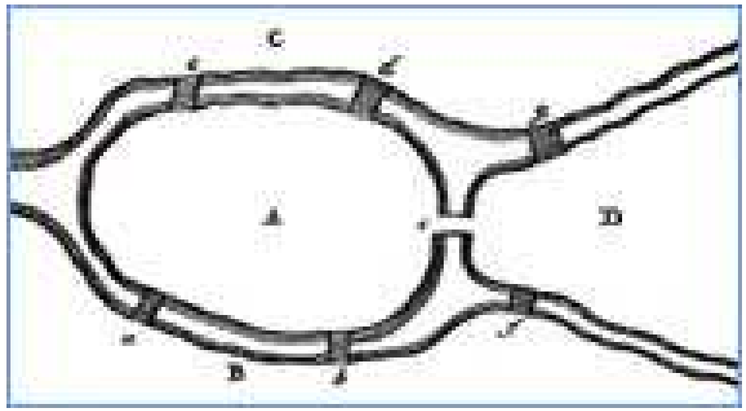
Solução proposta por Euler



Contagem:

A é atingível por 5 pontes $\Longrightarrow$ A deve ocorrer 3 vezes
B é atingível por 3 pontes $\Longrightarrow$ B deve ocorrer 2 vezes
C é atingível por 3 pontes $\Longrightarrow$ C deve ocorrer 2 vezes
D é atingível por 3 pontes $\Longrightarrow$ D deve ocorrer 2 vezes

Solução proposta por Euler

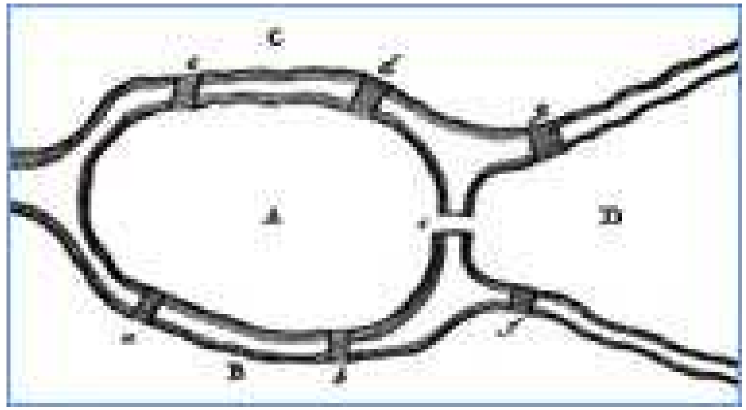


Contagem:

A é atingível por 5 pontes $\Longrightarrow$ A deve ocorrer 3 vezes
B é atingível por 3 pontes $\Longrightarrow$ B deve ocorrer 2 vezes
C é atingível por 3 pontes $\Longrightarrow$ C deve ocorrer 2 vezes
D é atingível por 3 pontes $\Longrightarrow$ D deve ocorrer 2 vezes

A seqüência procurada deve ter 9 letras

Solução proposta por Euler

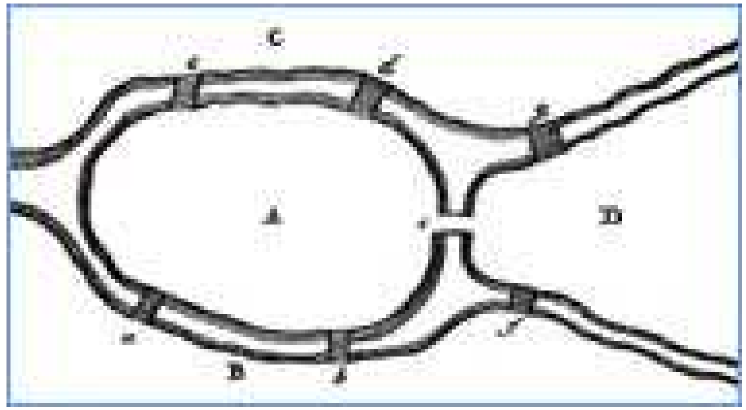


Contagem:

A é atingível por 5 pontes $\Longrightarrow$ A deve ocorrer 3 vezes
B é atingível por 3 pontes $\Longrightarrow$ B deve ocorrer 2 vezes
C é atingível por 3 pontes $\Longrightarrow$ C deve ocorrer 2 vezes
D é atingível por 3 pontes $\Longrightarrow$ D deve ocorrer 2 vezes

A seqüência procurada deve ter 9 letras
Mas, para atravessar **7 pontes** precisamos **8 letras**!

Solução proposta por Euler



Contagem:

A é atingível por 5 pontes $\Longrightarrow$ A deve ocorrer 3 vezes
B é atingível por 3 pontes $\Longrightarrow$ B deve ocorrer 2 vezes
C é atingível por 3 pontes $\Longrightarrow$ C deve ocorrer 2 vezes
D é atingível por 3 pontes $\Longrightarrow$ D deve ocorrer 2 vezes

A seqüência procurada deve ter 9 letras

Mas, para atravessar **7 pontes** precisamos **8 letras**!

Conclusão: Não existe a trilha desejada!

Solução proposta por Euler

r: região de terra

$p(r)$ = # pontes que ligam r (às demais regiões)

Solução proposta por Euler

r: região de terra

$p(r)$ = # pontes que ligam r (às demais regiões)

r é par se $p(r)$ é par

r é impar se $p(r)$ é impar

Solução proposta por Euler

r: região de terra
$p(r)$ = # pontes que ligam r (às demais regiões)

r é par se $p(r)$ é par
r é impar se $p(r)$ é impar

R_p = cjto das regiões pares
R_i = cjto das regiões ímpares

No caso das 7 pontes: $|R_i| = 4$ e $R_p = \emptyset$

Solução proposta por Euler

r: região de terra
$p(r)$ = # pontes que ligam r (às demais regiões)

r é par se $p(r)$ é par
r é impar se $p(r)$ é impar

R_p = cjto das regiões pares
R_i = cjto das regiões ímpares

No caso das 7 pontes: $|R_i| = 4$ e $R_p = \emptyset$

$$\sum_{r \in R_i} \#\text{ocorr}(r) = \sum_{r \in R_i} \frac{p(r)+1}{2} = \sum_{r \in R_i} \frac{p(r)}{2} + \frac{1}{2}|R_i|$$

$$= \#\text{total de pontes} + \frac{1}{2}|R_i| = 9$$

Solução proposta por Euler

Caso mais geral:

$$\sum_{r\in R_p} \#\text{ocorr}(r) + \sum_{r\in R_i} \#\text{ocorr}(r) =_* \sum_{r\in R_p} \frac{p(r)}{2} + \sum_{r\in R_i} \frac{p(r)+1}{2}$$

$$= \sum_{r\in R_p\cup R_i} \frac{p(r)}{2} + \frac{1}{2}|R_i|$$

$$= \#\text{total de pontes} + \frac{1}{2}|R_i|$$

Solução proposta por Euler

Caso mais geral:

$$\sum_{r \in R_p} \#\text{ocorr}(r) + \sum_{r \in R_i} \#\text{ocorr}(r) =_* \sum_{r \in R_p} \frac{p(r)}{2} + \sum_{r \in R_i} \frac{p(r)+1}{2}$$

$$= \sum_{r \in R_p \cup R_i} \frac{p(r)}{2} + \frac{1}{2}|R_i|$$

$$= \#\text{total de pontes} + \frac{1}{2}|R_i|$$

- $|R_i| = 2 \Longrightarrow$ **existe a trilha desejada**
- $|R_i| = 0 \Longrightarrow$ **existe a trilha desejada**
- $|R_i| > 2 \Longrightarrow$ **não existe a trilha desejada**

Solução proposta por Euler

Parágrafo 21(do artigo):

Após concluir que existe uma tal trilha, como encontrá-la?

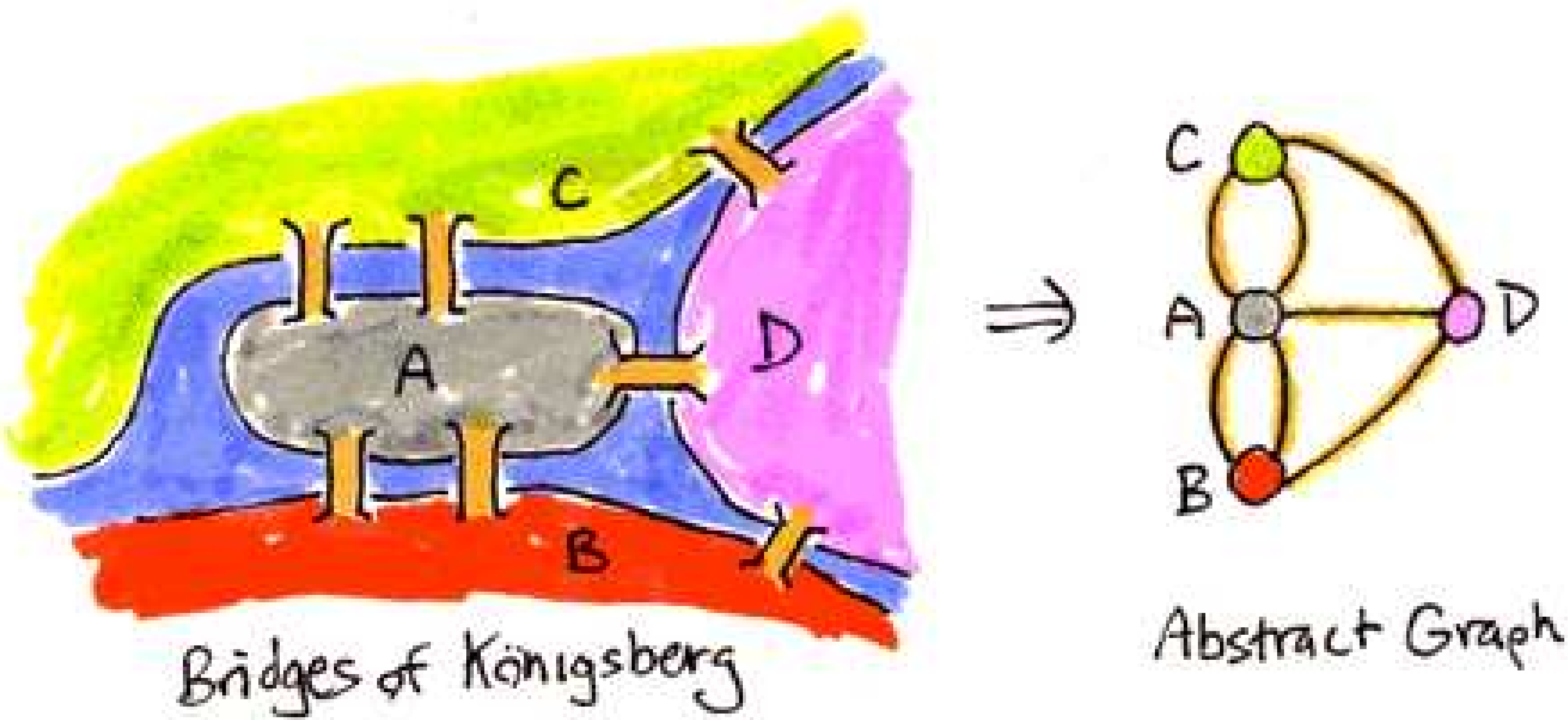
REGRA:

À medida que as pontes forem percorridas, considere-as

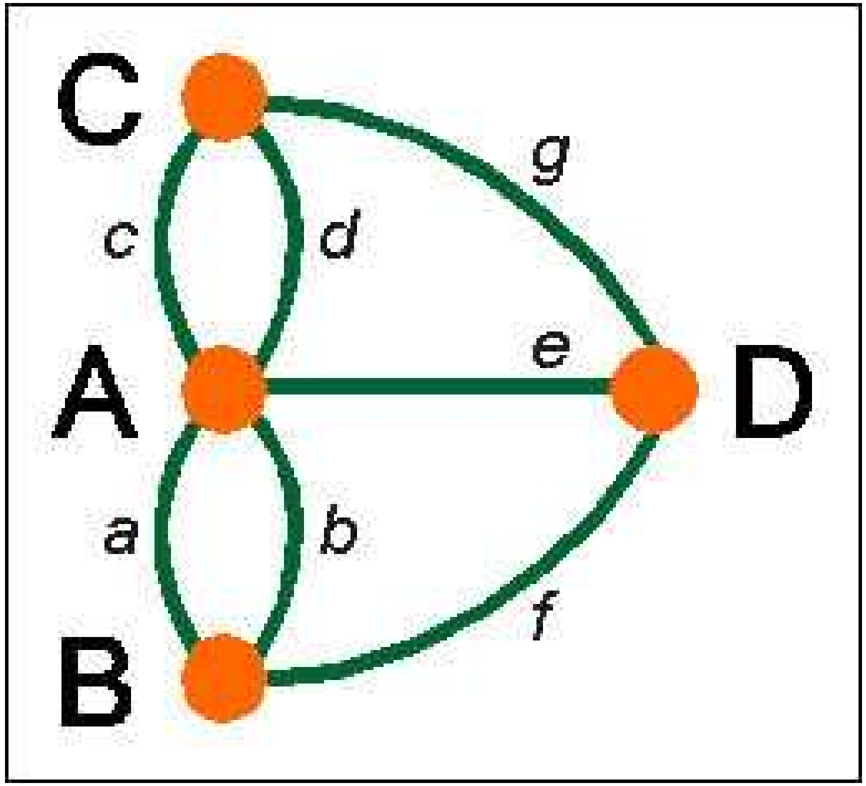
mentally removed, thereby considerably reducing the number of bridges; it is then an easy task to construct the required route across the remaining bridges; ...

I do not therefore think it worthwhile to give any further details concerning the finding of the routes."

Grafos



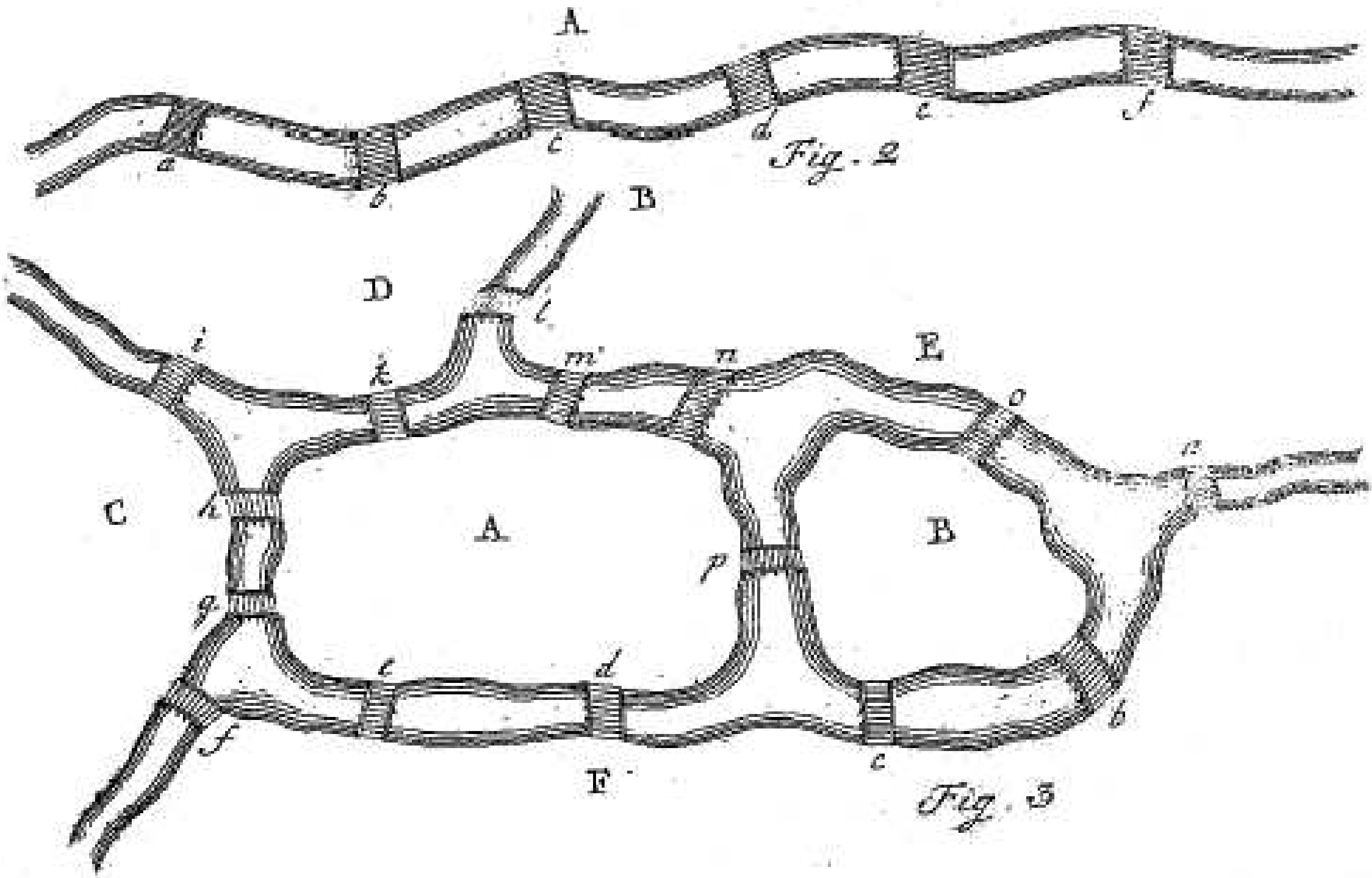
Grafos



Grafo $G = (V, A)$

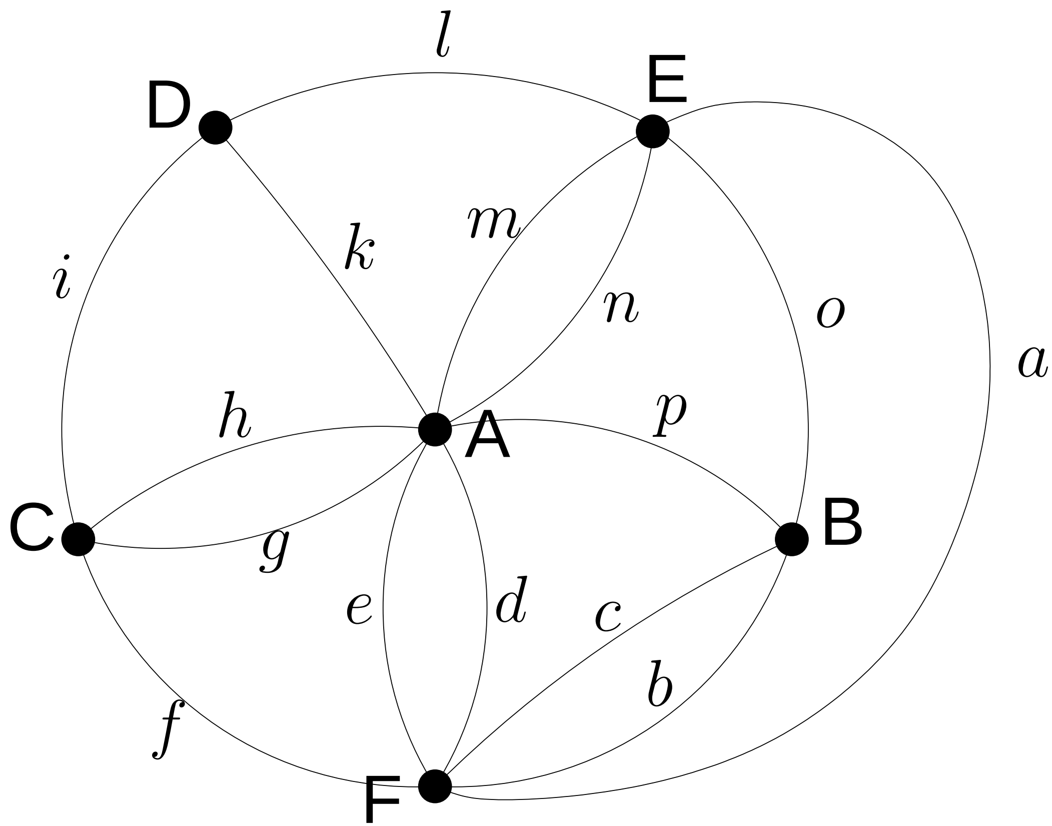
V = cjto de vértices $= \{A, B, C, D\}$

A = cjto de arestas $= \{a, b, c, d, e, f, g\}$

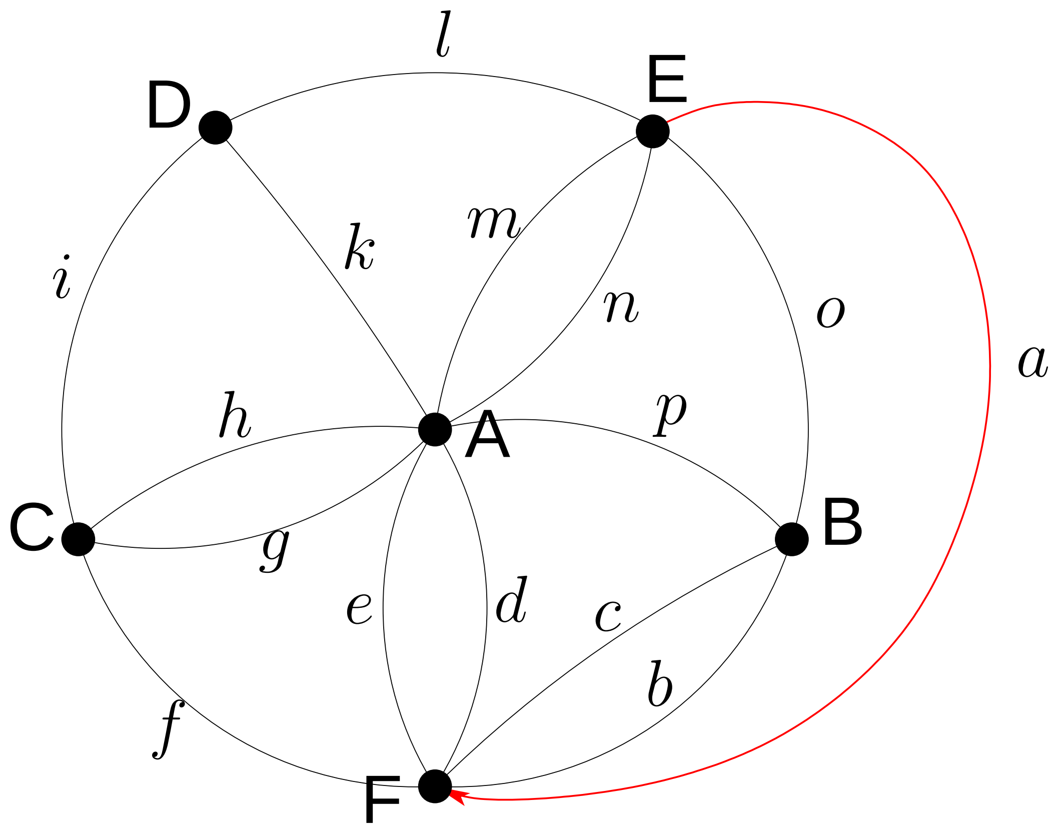


Uma instância com 15 pontes e regiões pares

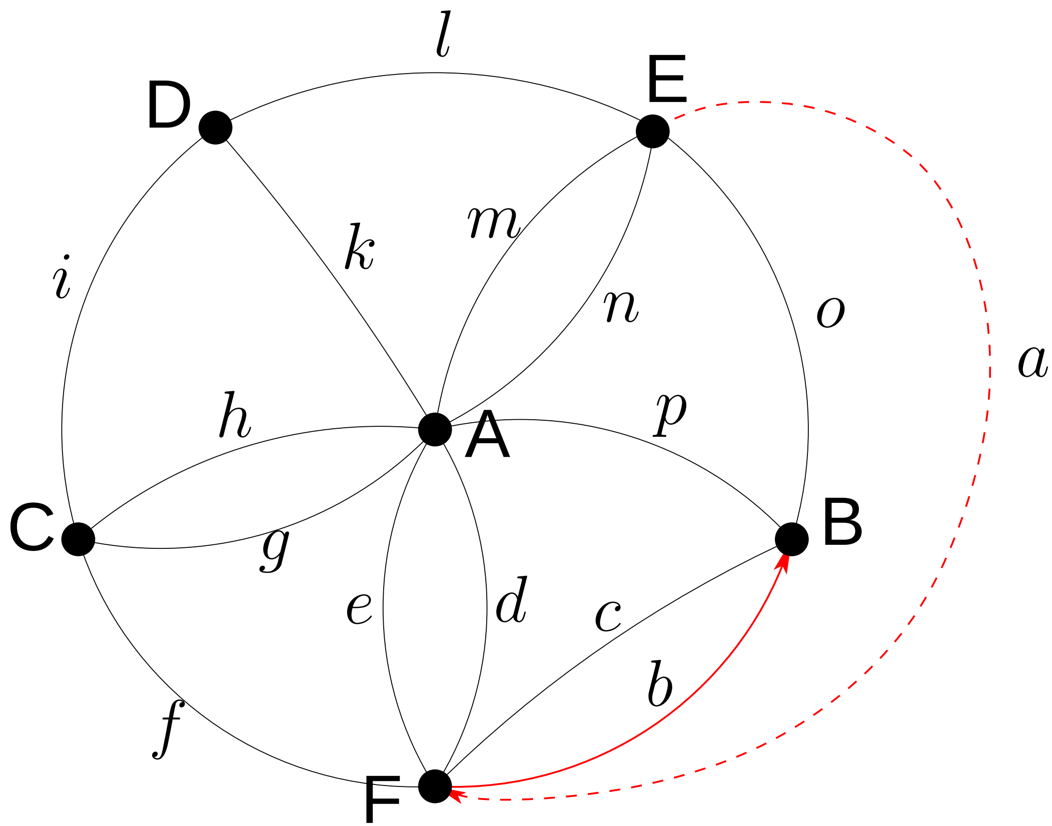
Solução para a instância com 15 pontes



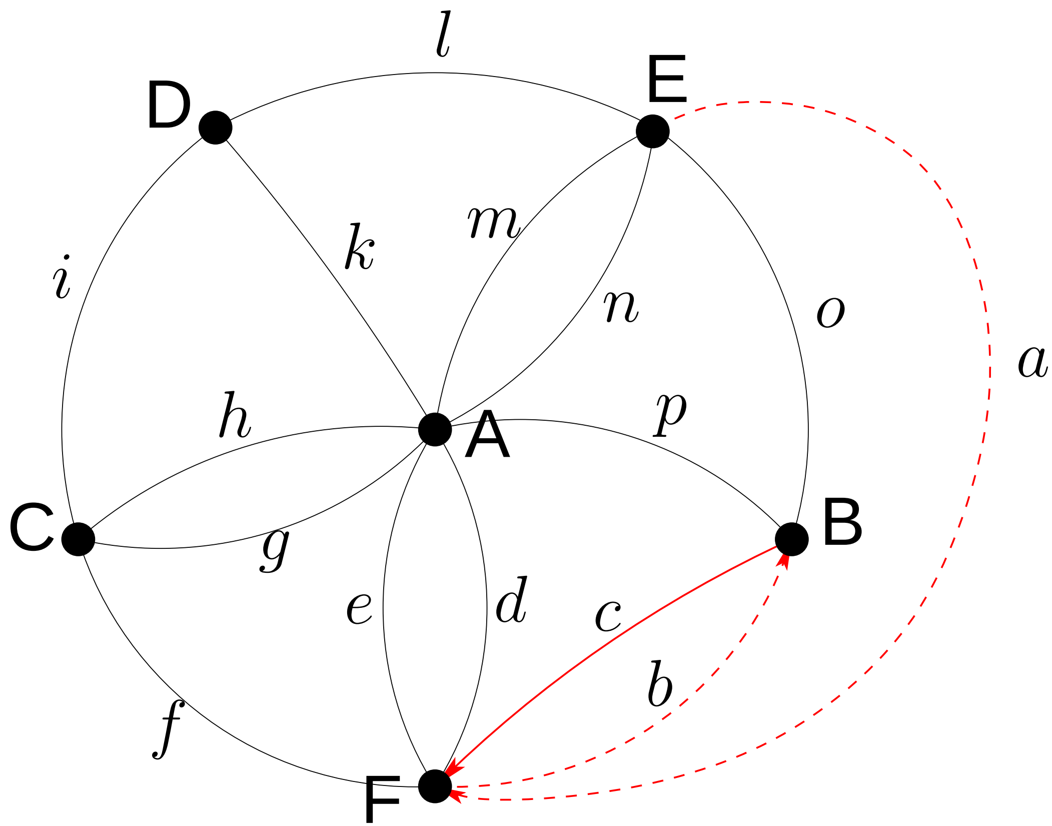
Solução para a instância com 15 pontes



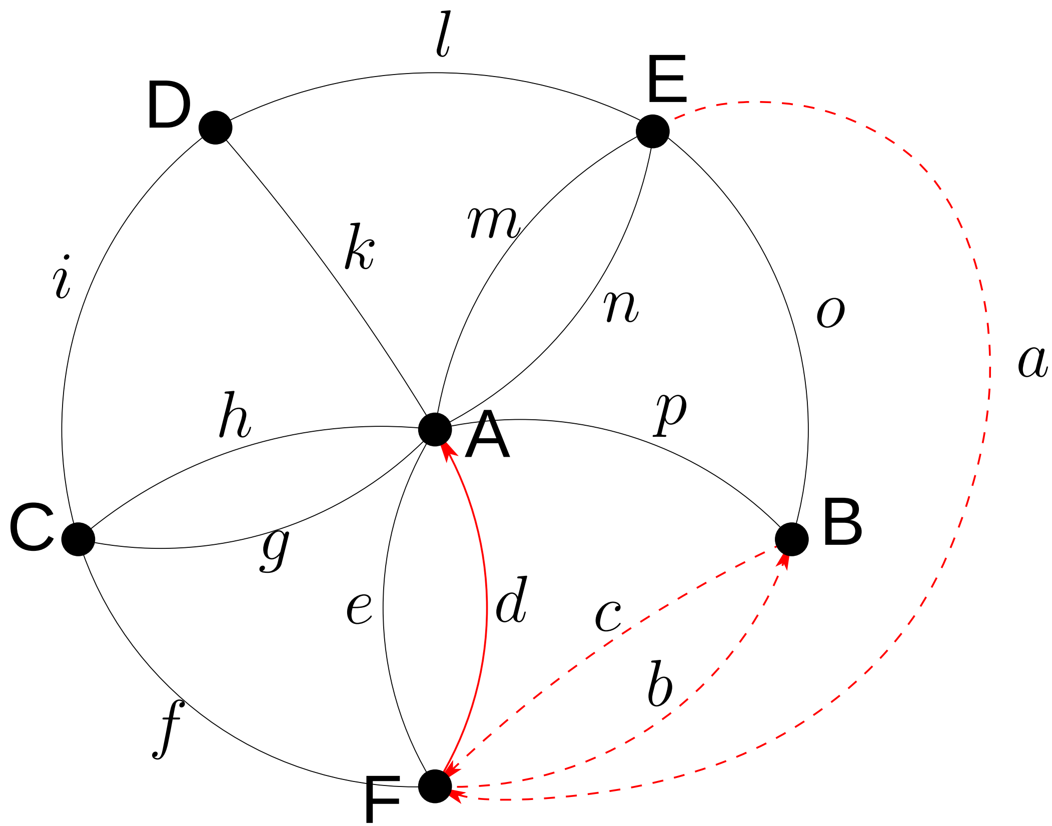
Solução para a instância com 15 pontes



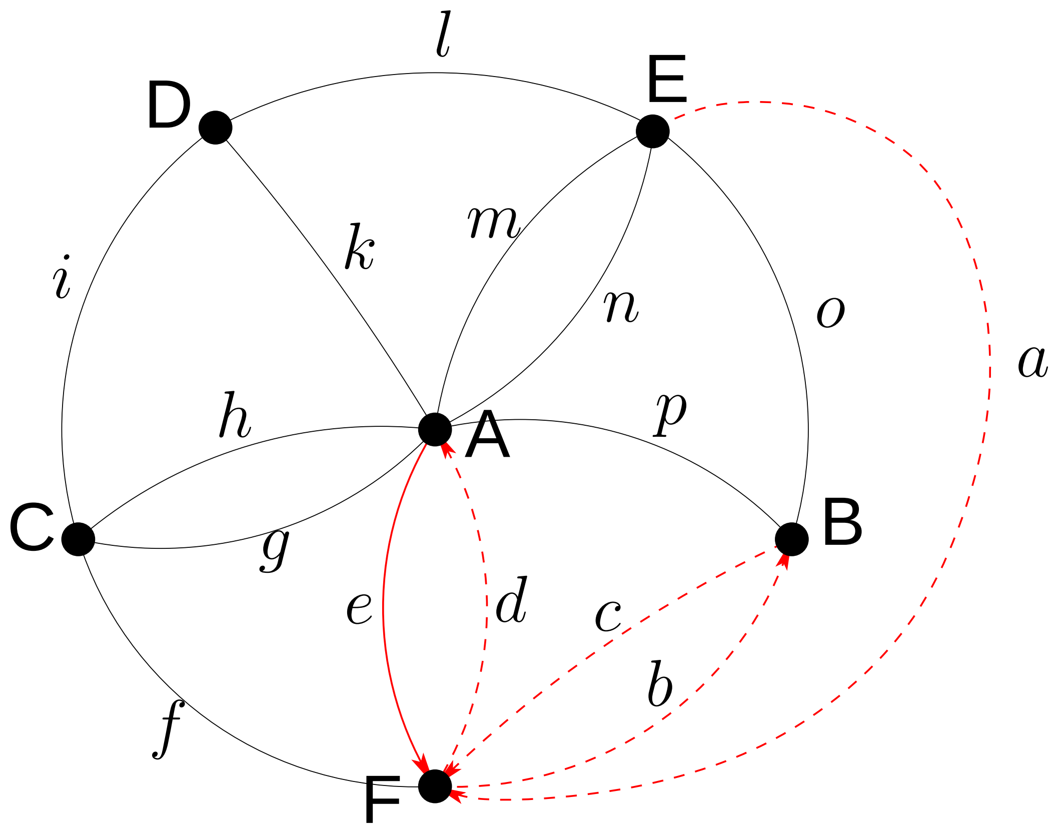
Solução para a instância com 15 pontes



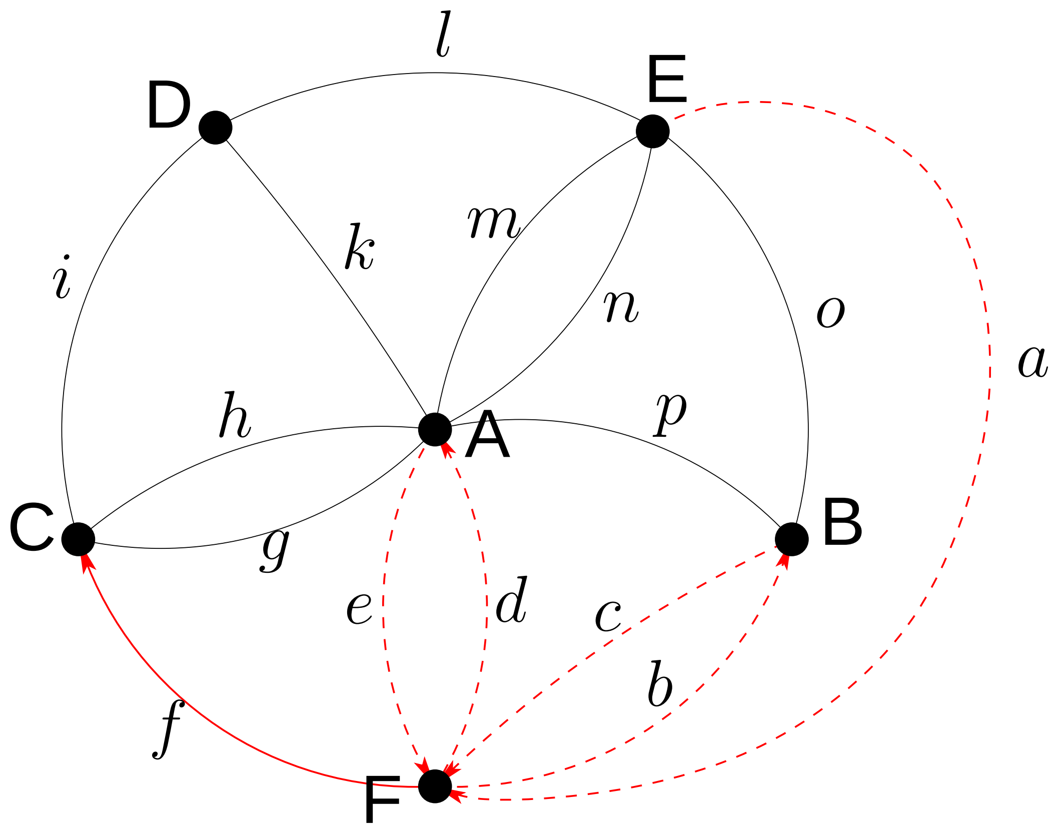
Solução para a instância com 15 pontes



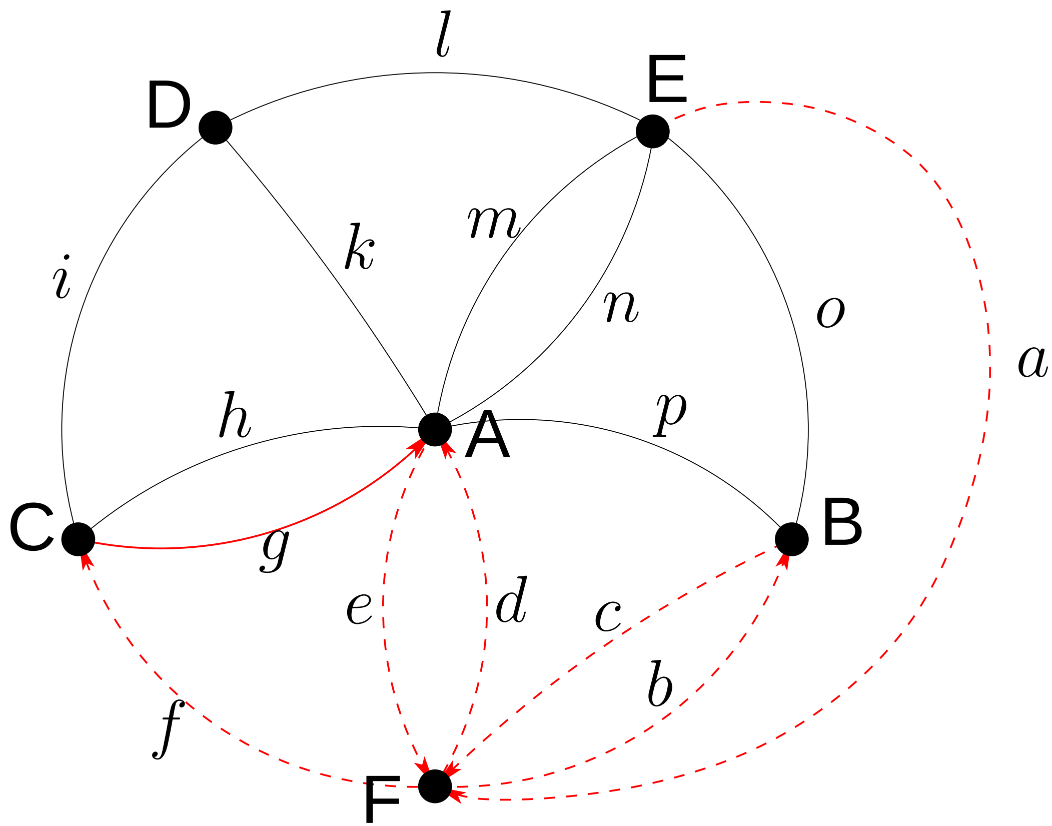
Solução para a instância com 15 pontes



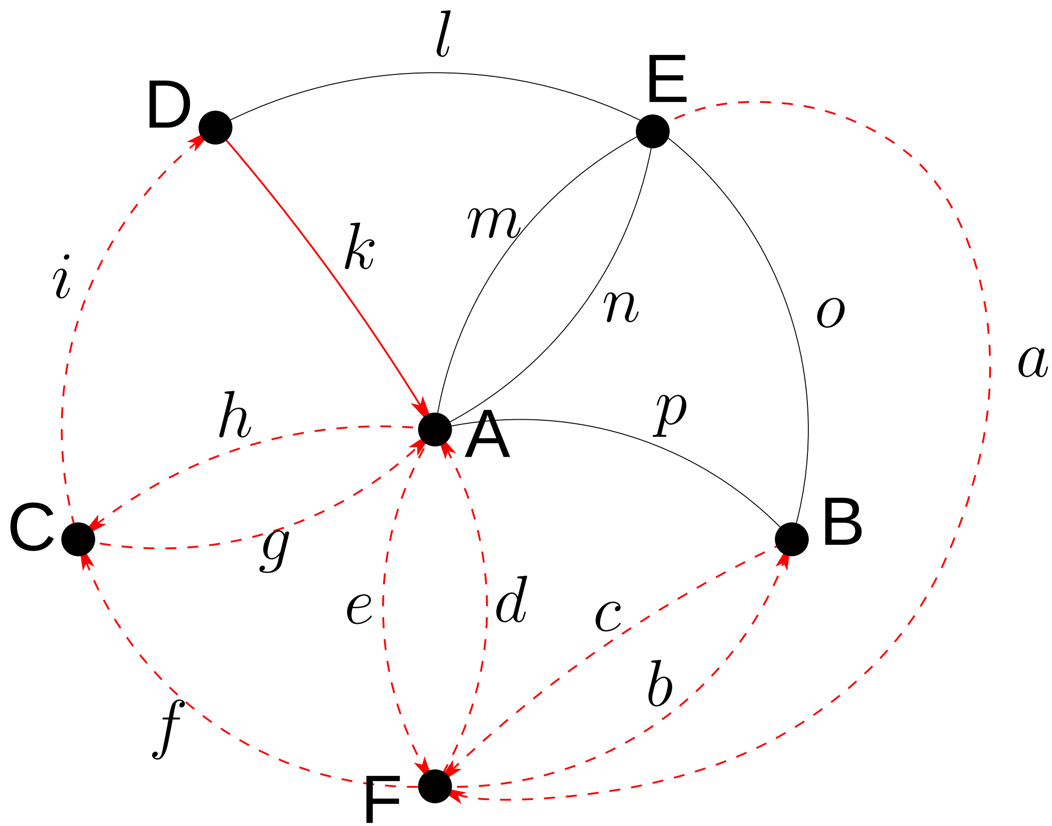
Solução para a instância com 15 pontes



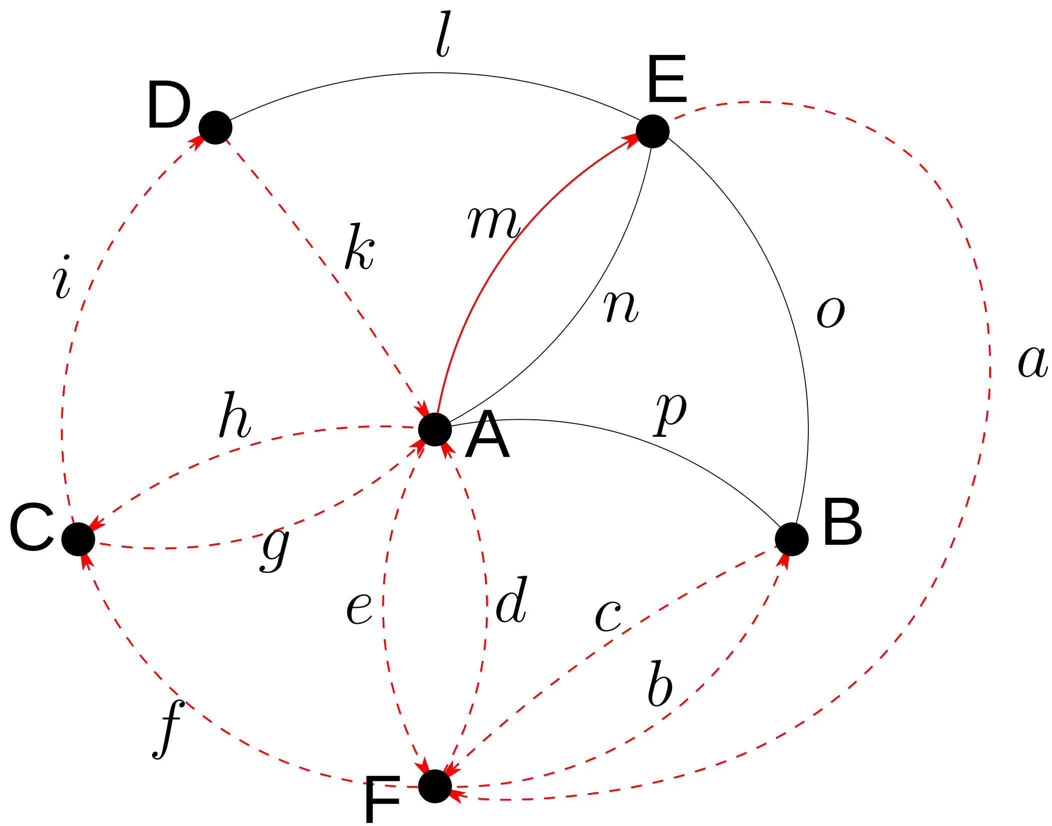
Solução para a instância com 15 pontes



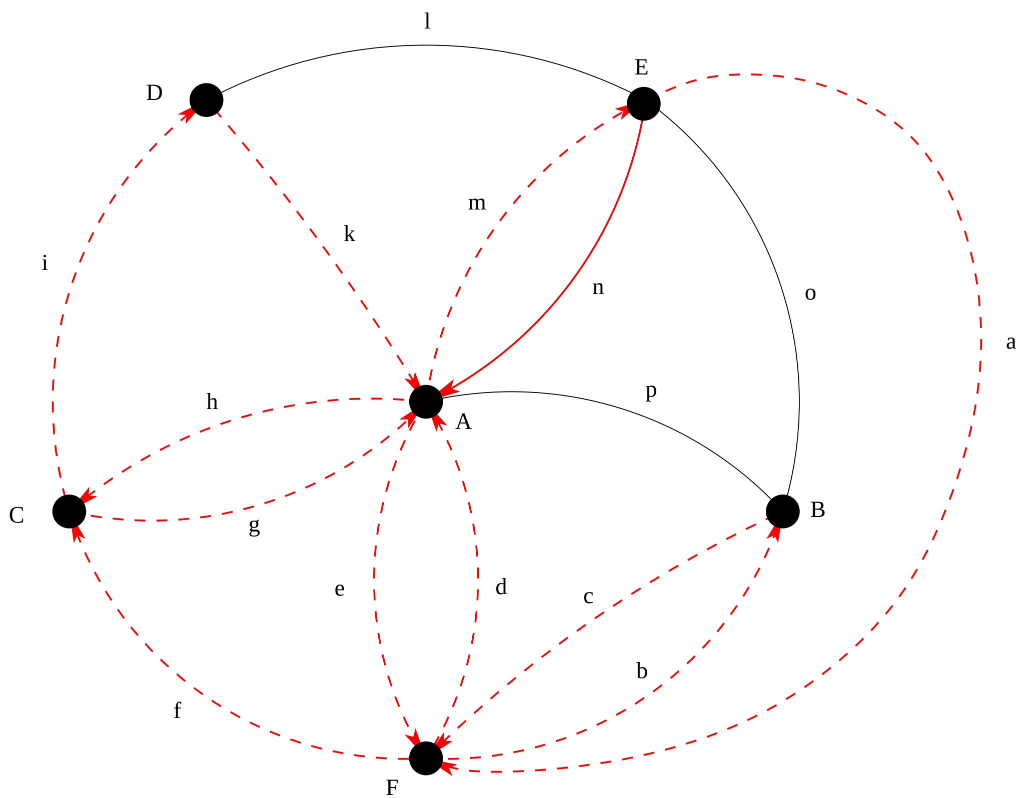
Solução para a instância com 15 pontes



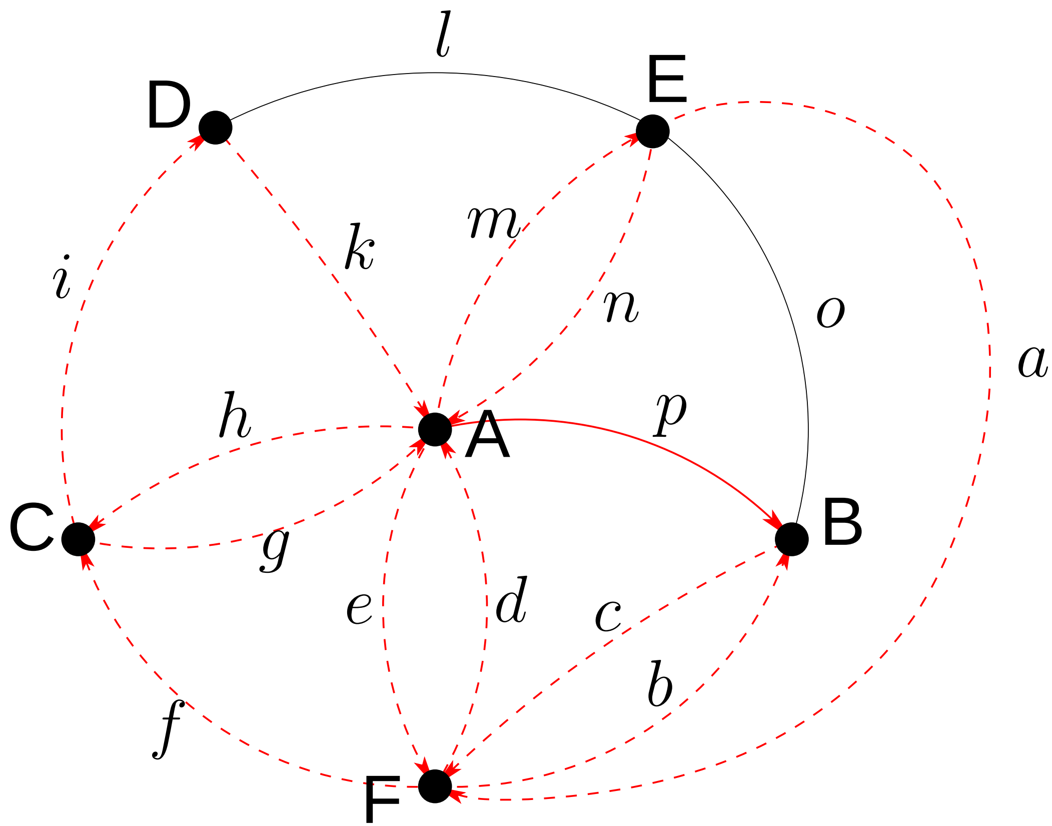
Solução para a instância com 15 pontes



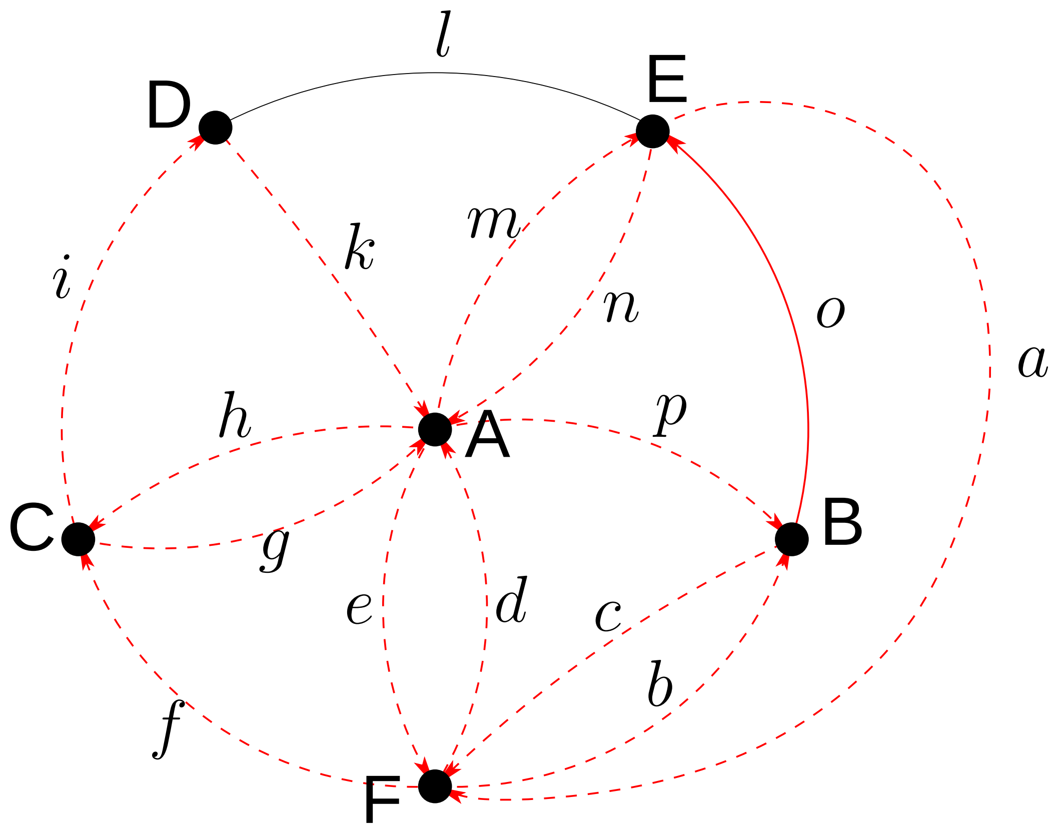
Solução para a instância com 15 pontes



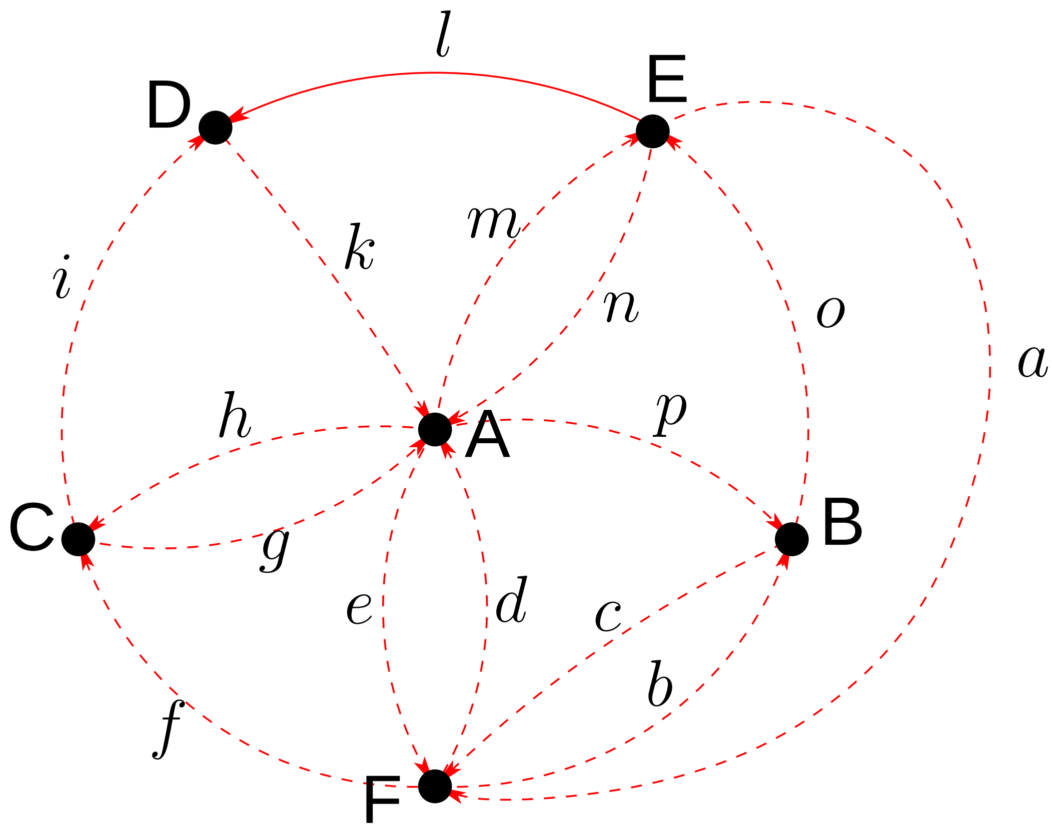
Solução para a instância com 15 pontes



Solução para a instância com 15 pontes



Solução para a instância com 15 pontes



Conceitos e resultados na linguagem de grafos

Trilha como desejada —> Trilha euleriana

Trilha fechada: quando o seu início e o término coincidem

Grafo euleriano: grafo que tem trilha euleriana fechada

Teorema 1.

G grafo conexo

G tem uma trilha euleriana $\iff$ G se tem no máximo 2 vértices de grau ímpar.

Conceitos e resultados na linguagem de grafos

Trilha como desejada —> Trilha euleriana

Trilha fechada: quando o seu início e o término coincidem

Grafo euleriano: grafo que tem trilha euleriana fechada

Teorema 1.

G grafo conexo

G tem uma trilha euleriana $\iff$ G se tem no máximo 2 vértices de grau ímpar.

Teorema 2.

É fácil decidir se um grafo tem uma trilha euleriana.

É fácil encontrar uma tal trilha quando ela existe.

Resultados na linguagem de grafos

ALGORITMO

Entrada: Grafo G com no máximo 2 vértices de grau ímpar.

(P_1) Seja v_o um vértice de grau ímpar (se existir); senão, seja v_o um vértice qualquer.
Faça $T_o := (v_o)$.

(P_2)
- Tendo escolhido a trilha $T_k = (v_o, a_1, v_1, \ldots, a_k, v_k)$, faça $G_k := G - \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.
- Escolha em G_k uma aresta a_{k+1} incidente a v_k, dando preferência a uma que não seja istmo.
- Seja $a_{k+1} = \{v_k, v_{k+1}\}$ e $T_{k+1} := T_k(v_k, a_{k+1}, v_{k+1})$.
- Repita o passo P_2 enquanto isto for possível.

(P_3) Devolva a trilha construída.

Referências ao artigo de Euler

- 1751 Jean d' Alembert
- 1804 Simon-Antoine-Jean Lhuilier
- 1810 Louis Poinsot [grafo completo com 7 vértices]
- 1851 É. Coupy [tradução francesa do artigo de Euler]
- 1949 O. Terquem [anel de dominós]
- 1884 Édouard Lucas – "Recréations Mathématiques" (outra tradução francesa e ...)
- 1901 W. Ahrens "Math. Unterhaltungen und Spiele"
- 1894 W. W. Rouse Ball – "Mathematical Recreations and Problems"
  O diagrama de um grafo apareceu pela 1a. vez.

Prova da necessidade e suficiência da condição

- 1871 Carl Hierholzer (Privatdozent Univ. Karlsruhe)

“ Em qualquer sistema de *’branches and nodes’* (isto é, um grafo), a presença de exatamente zero ou dois nós ímpares é condição necessária e suficiente para que um tal sistema possa ser percorrido por um *’path’*,...”

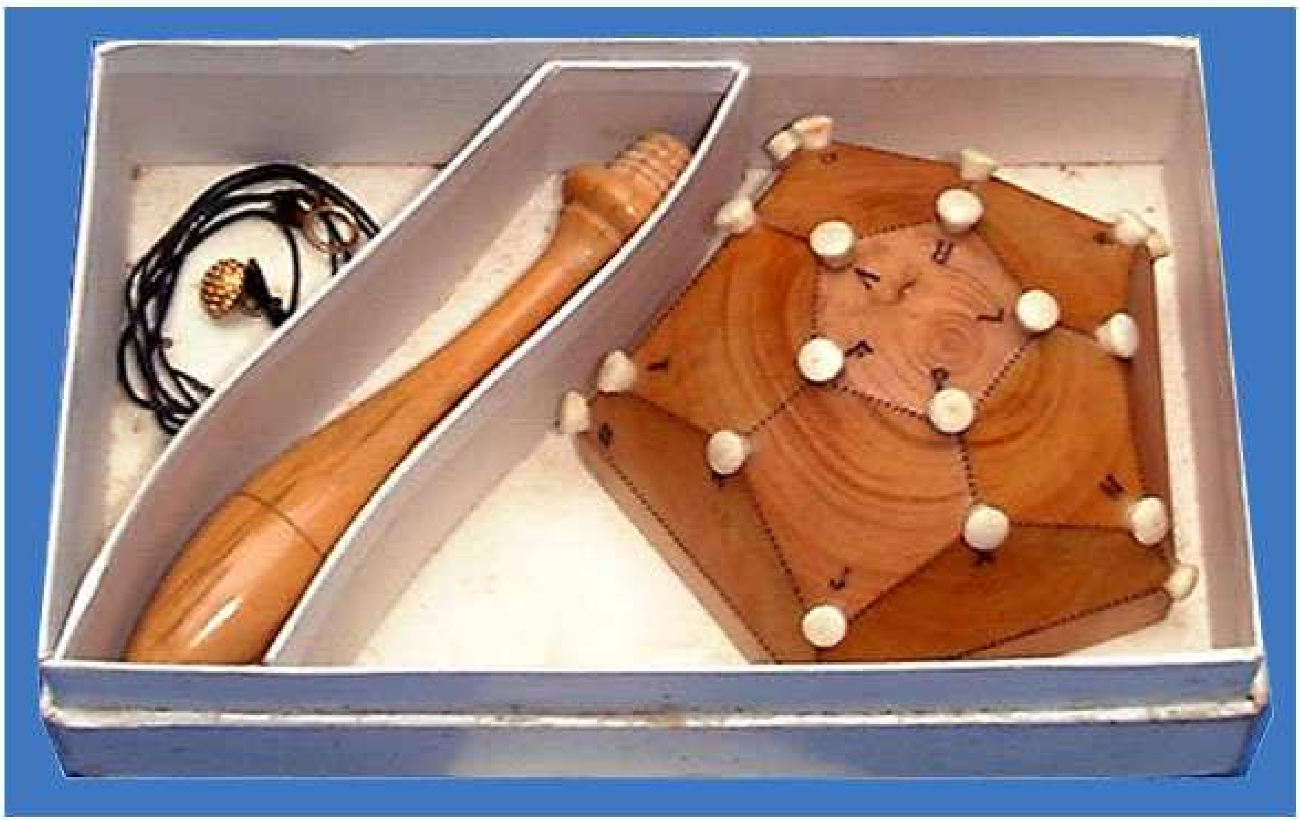
[Hierholzer morreu repentinamente aos 30 anos – o artigo foi escrito por Christian Wiener com a ajuda do geômetra J. Löroth.]

Outras referências

- 1876 L. Saalschütz – nova ponte ligando regiões B e C. Listou todas as 48 possíveis trilhas abertas.
- Contribuições de Listing, Cayley, Pólya, Vandermonde,...
- 1936 Dénes König
  "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen"
  primeiro livro sobre teoria dos grafos.

Um problema correlato

Jogo recreativo criado por William Rowan Hamilton, 1856



Volta ao redor do mundo

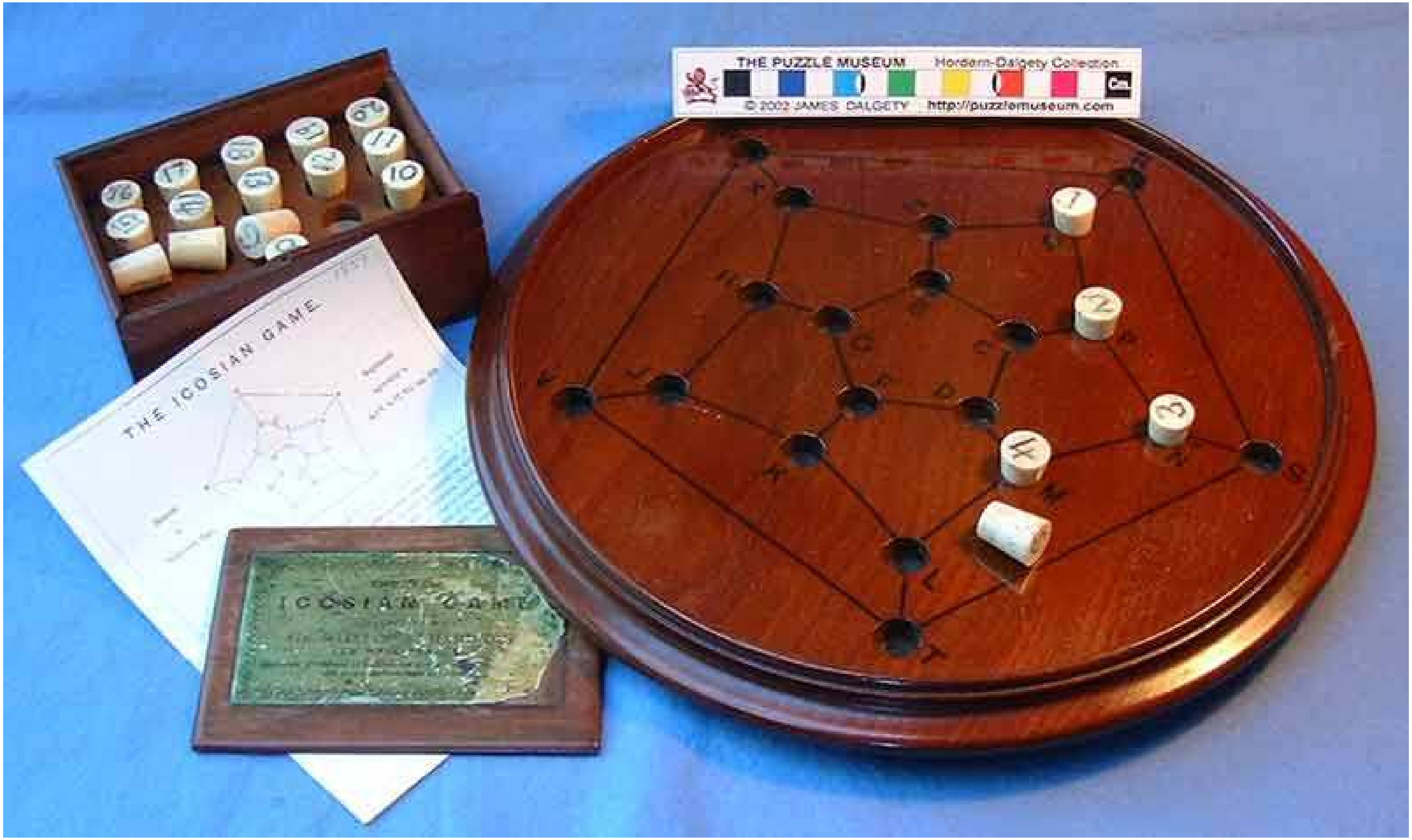
Um problema correlato

William Rowan Hamilton (1805-1865)

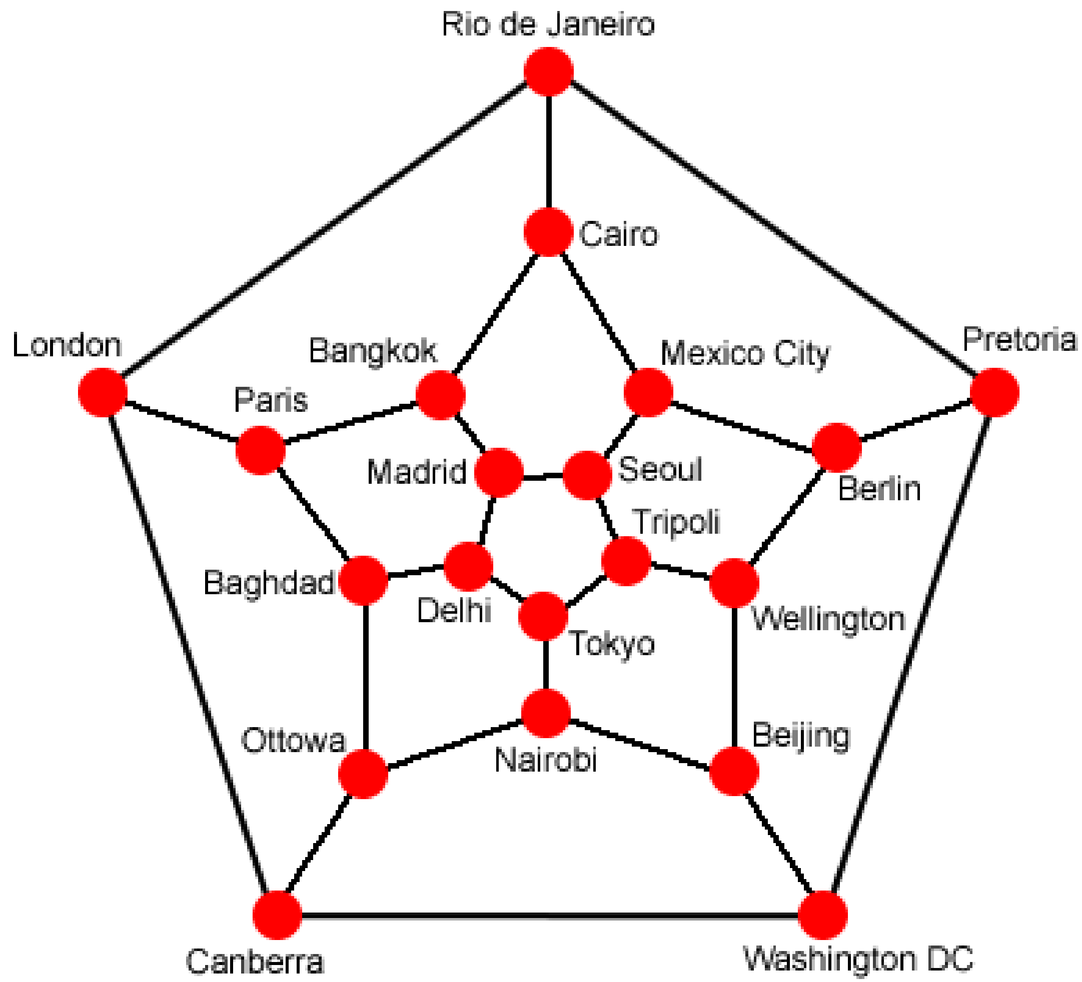
Um problema correlato

Dodecaedro – 12 faces pentagonais, 20 vértices

Um problema correlato – versão planar

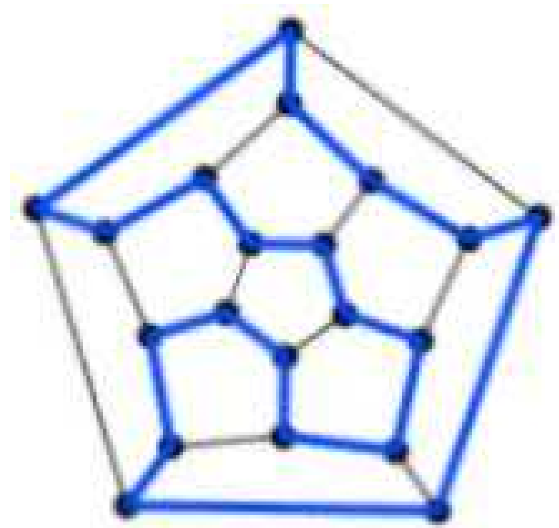


Um problema correlato



Um problema correlato

Objetivo: Encontrar no grafo abaixo um circuito que passa exatamente uma vez em cada um dos vértices.



Uma solução: o circuito azul

Em homenagem a Hamilton: circuitos hamiltonianos

Grafo hamiltoniano: se contém um circuito hamiltoniano

Problema dos circuitos hamiltonianos

Problema: Decidir se um dado grafo é hamiltoniano.

Problema difícil !!!

Fato: Não se conhece uma condição necessária e suficiente para um grafo ser hamiltoniano (que seja fácil de ser testada).

Fato: Não existe um certificado curto para provar que um grafo **não é hamiltoniano** (que seja fácil de ser testado).

certificado curto para resposta SIM:

existe $\Longrightarrow$ pertinência à classe NP

certificado curto para resposta NÃO:

não se conhece !

Complexidade Computacional: a questão P $\times$ NP

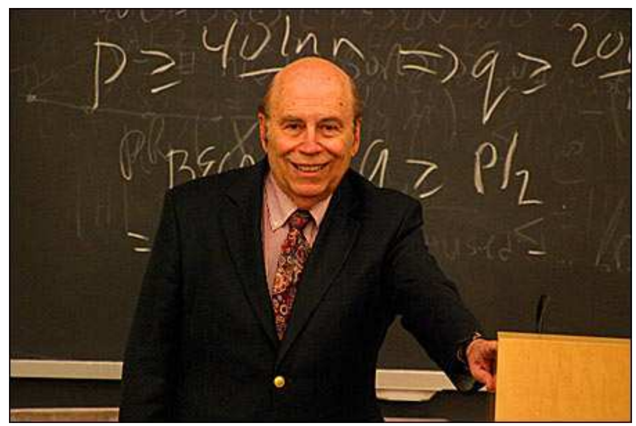
- Precursores
  - grupo de Yablonsky, 1950
  - Gödel, 1956 (carta a von Neumann)

Yablonski

Gödel

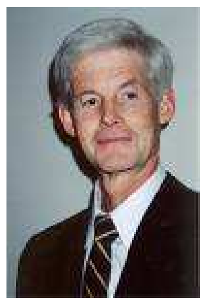
Histórico: P e NP

- Noções formais de P e NP
  - Cobham, 1964
  - Edmonds, 1965-1969
  - Rabin e Scott, 1965



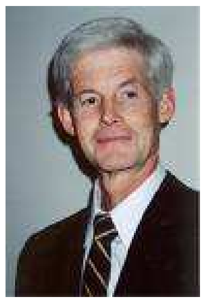
Histórico: P e NP

- P = NP? NP-completude
  - Cook 1971
  - Levin 1971



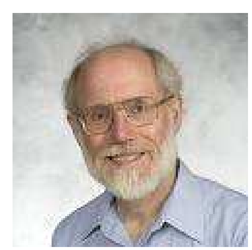
Histórico: P e NP

- P = NP? NP-completude
  - Cook 1971
  - Levin 1971




- Lista de problemas
  - Karp 1972 (grafos hamiltonianos, ...)
  - Garey, Johnson 1979





SAT - problema da satisfatibilidade

Dada uma fórmula booleana:

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_4 \vee x_2)$$

Pergunta:

Existe uma atribuição de valores Verdadeiro/Falso às variáveis que tornam a fórmula verdadeira?

SAT - problema da satisfatibilidade

Dada uma fórmula booleana:

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_4 \vee x_2)$$

Pergunta:

Existe uma atribuição de valores Verdadeiro/Falso às variáveis que tornam a fórmula verdadeira?

SAT $\in$ NP

SAT - problema da satisfatibilidade

Dada uma fórmula booleana:

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_4 \vee x_2)$$

Pergunta:

Existe uma atribuição de valores Verdadeiro/Falso às variáveis que tornam a fórmula verdadeira?

SAT $\in$ NP

Não se conhece algoritmo eficiente para resolver o SAT

Não se sabe se SAT $\in$ P

SAT - problema da satisfatibilidade

Dada uma fórmula booleana:

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_4 \vee x_2)$$

Pergunta:

Existe uma atribuição de valores Verdadeiro/Falso às variáveis que tornam a fórmula verdadeira?

SAT $\in$ NP

Não se conhece algoritmo eficiente para resolver o SAT

Não se sabe se SAT $\in$ P

Decidir se um grafo é hamiltonianos é tão difícil quanto o SAT

E se Euler tivesse nascido no século XX?

E se Euler tivesse nascido no século XX?

[...] mentally removed, thereby considerably reducing the number of bridges; it is then an easy task to construct the required route across the remaining bridges; ...

I do not therefore think it worthwhile to give any further details concerning the finding of the routes.”

Muito obrigada!