

4 PLANARIDADE

Um grafo $G = (V, E)$ é dito **planar** se pode ser desenhado no plano de forma que suas arestas se interceptam apenas nos extremos. Um tal desenho no plano é chamado uma **imersão plana** ou **representação plana** ou um **mapa** de G . Dizemos também que G é **imersível no plano** (**embeddable in the plane**). Um **grafo plano** é um grafo planar que está imerso no plano.

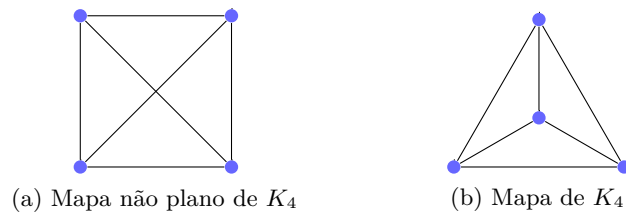


Figura 4.1: Exemplos de representações de K_4 no plano.

Seja G um grafo plano. Ao remover do plano as curvas e os pontos de seu mapa que representam as arestas e os vértices G , as regiões conexas obtidas são ditas **faces**. Observe que exatamente uma face é ilimitada. Esta face é chamada de **face externa** (ou infinita).

O conjunto das arestas no fecho de uma face F de um grafo G é dito a **fronteira** de F . Um circuito de um grafo plano é chamado **circuito facial** se é uma fronteira de uma face. Dizemos que duas imersões planas são **equivalentes** se a fronteira de uma face em uma imersão sempre corresponde à fronteira de uma face em outra imersão.

Exemplo 4.1 O grafo da Figura 4.2 possui duas representações que não são equivalentes.

Se todas as imersões planas de G são equivalentes, dizemos que G tem uma *única* imersão plana.

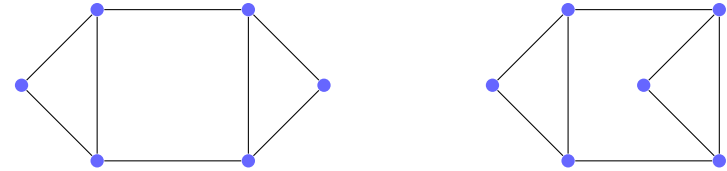


Figura 4.2: Apenas um dos mapas acima possui um circuito facial com 6 arestas.

Exemplo 4.2 O grafo completo em 4 vértices tem uma única imersão plana (Figura 4.3).

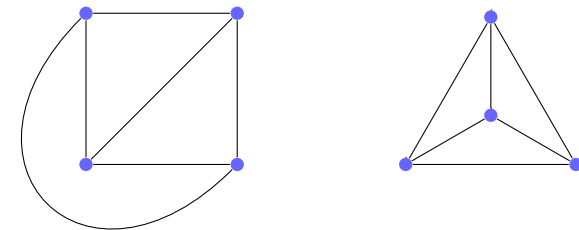


Figura 4.3: Dois mapas equivalentes de K_4

O seguinte resultado será usado na prova do teorema de Kuratowski 4.14. Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [NC88].

Teorema 4.3 (Nishizeki & Chiba, 1988 [NC88]). Se G é um grafo planar 2-conexo e G não é um circuito, então G tem uma única imersão plana se e somente se G é uma subdivisão de um grafo 3-conexo ou de um $K_4 - e$.

Demonstração. Primeiramente vamos provar que se G é um grafo 2-conexo planar que não é nem um circuito, nem uma subdivisão de um grafo 3-conexo, nem de um $K_4 - e$, então G possui duas imersões no plano não-equivalentes. Para isso, faremos o uso de multigrafos.

Seja θ o multigrafo no conjunto de vértices $\{x, y\}$ e com três arestas paralelas ligando x a y . Observe que $K_4 - e$ é uma subdivisão de θ . Aqui dizemos que um multigrafo G é **bom** se G é 2-conexo, não é um circuito, não é uma subdivisão de um grafo 3-conexo e não é uma subdivisão de θ . Note que se G é um grafo (sem arestas paralelas) bom, então G não é uma subdivisão de $K_4 - e$.

Suponha que a proposição não é verdadeira. Seja G um contraexemplo mínimo para a proposição. Isto é, o multigrafo G é bom, possui apenas uma imersão planar e contém o menor número possível de vértices.

Observe que se G possui um laço então G tem um vértice de corte ou é um circuito. Afirmamos também que G não contém vértices de grau 2. Caso contrário, seja x um vértice de grau 2 e seja y um vizinho de x em G . Considere o multigrafo G' obtido de G pela contração da aresta xy (aqui permitimos arestas paralelas). Observe que G' possui k imersões planas não-equivalentes se e somente se G possui k imersões planas não-equivalentes. Logo temos que G' é um contraexemplo para a proposição com menos vértices que G .

Se G possui apenas dois vértices, então G possui pelo menos 4 arestas (paralelas). Caso contrário, temos que G é um circuito ou G é isomorfo a θ . Claramente G possui pelo menos duas imersões planas não-equivalentes. Analogamente, se G possui três vértices, então G possui pelo menos cinco arestas e, portanto, possui pelo menos duas imersões planas não-equivalentes.

Suponha que G possui pelo menos quatro vértices. Como G não é 3-conexo, então G possui um conjunto de corte S de tamanho 2, digamos $S = \{x, y\}$. Seja H um componente de G , e sejam $H_1 = G[V(H) \cup S]$ e $H_2 = G - V(H)$.

Considere uma imersão plana I de G . Considere as imersões planas I_1

e I_2 de H_1 e H_2 , respectivamente, induzidas por I . Seja f_1 a fronteira da face externa de H_1 em I_1 , e f_2 a fronteira da face externa de H_2 em I_2 . Note que $x, y \in V(f_1)$ e $x, y \in V(f_2)$. Podemos escrever $f_1 = P_1 \cup Q_1$ e $f_2 = P_2 \cup Q_2$, onde P_1, Q_1, P_2, Q_2 são caminhos com extremos em x e y .

Podemos supor, sem perda de generalidade, que a fronteira da face externa de G em I é $P_1 \cup P_2$. Além disso, sabemos que P_2 está no interior do circuito $P_1 \cup Q_2$ e Q_1 está no exterior do circuito $P_1 \cup Q_2$. Assim, temos que $P_1 \cup Q_2$ não é face em I . Podemos refletir a imersão de H_2 de forma a obter uma imersão plana de G com $P_1 \cup Q_2$ como face externa. Isso garante que a imersão plana obtida é diferente de I . Logo G possui duas imersões planas não-equivalentes.

Seja G um grafo planar 2-conexo diferente de um circuito. Precisamos mostrar que se G é uma subdivisão de um grafo 3-conexo, ou uma subdivisão de $K_4 - e$, então G admite uma única imersão planar. Essa afirmação é óbvia no caso em que G é uma subdivisão de $K_4 - e$.

Suponha que G é um grafo 3-conexo. Note que qualquer subdivisão de G tem o mesmo número de imersões planas não-equivalentes que G . Suponha que G é um grafo planar que admite pelo menos duas imersões planas I_1, I_2 . Existe circuito C em G que é uma face em I_1 , mas não é face em I_2 . Seja G' o subgrafo de G induzido pelas arestas imersas no interior de C em I_2 .

Se G' não contém vértices diferentes dos vértices de C , então G' é um conjunto de “pontes” de C e, portanto, contém pelo menos uma aresta, digamos xy , com $x, y \in V(C)$. Tome P_1, P_2 os dois caminhos em C com extremos em x e y . Sejam v_1, v_2 dois vértices diferentes de x e y em P_1 e P_2 , respectivamente. Afirmamos que $G - x - y$ é desconexo. Caso contrário, existe caminho Q conectando v_1 e v_2 usando arestas que estão fora de C em I_2 . Como C é uma face, digamos interna, em I_1 , o caminho Q deve cruzar e e, portanto, temos que I_1 não é uma imersão no plano.

Suponha então que G' contém um vértice $v_1 \notin V(C)$. Podemos supor que $G - V(G') - V(C)$ contém pelo menos um vértice v_2 , caso contrário cairíamos no caso anterior. Como G é 3-conexo, existem pelo menos 3 caminhos disjuntos nos vértices conectando v_1 a v_2 , digamos Q_1, Q_2, Q_3 . Sejam x_1, x_2, x_3 os vértices de Q_1, Q_2, Q_3 em $V(C)$, respectivamente, mais próximos de v_1 . Para cada $i = 1, 2, 3$ seja A_i a seção de Q_i entre v_1 e x_i , e B_i a seção de Q_i entre x_i e v_2 . Considere a imersão I'_1 de $H = C \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$ induzida por I_1 . Seja $R = \{v_1, x_1, x_2, x_3\}$. Observe que H é uma subdivisão de K_4 , e seus vértices de grau 3 são precisamente os vértices de R . Cada um dos vértices em R , portanto, está contido em 3 faces de I'_1 , e cada uma das faces de I'_1 não contém exatamente um dos vértices de R . Seja F a face de I'_1 que contém o vértice v_2 em seu interior. Como C é uma face em I_1 , não há vértices no interior de C em I_1 e, portanto, não há vértices no interior de C em I'_1 . Assim, a face que contém v_2 não é C e, portanto, temos $v_1 \in V(F)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $A_1, A_2 \subset F$ e, portanto, temos que F não contém x_3 . Como B_3 liga v_2 a x_3 , temos que B_3 deve conter algum vértice de F . Como Q_1, Q_2 e Q_3 são disjuntos nos vértices, temos que se B_3 contém algum vértice z em F , então z está em C , mas então B_3 deve passar pelo interior de C . Logo, temos que I_1 não é uma imersão no plano.

Portanto todo grafo 3-conexo planar possui uma única representação no plano. $\square$

Corolário 4.4 Se G é um grafo planar 3-conexo, então G tem uma única imersão plana.

Teorema 4.5 (Euler, 1750 – Fórmula de Euler). Seja G um grafo plano conexo, e sejam n o número de vértices de G , m o número de arestas de G , e f o número de faces de G . Temos que $n - m + f = 2$.

Demonstração. Fixe n arbitrário e vamos provar o teorema por indução

em m .

O menor valor possível para m é $n - 1$. Nesse caso, o grafo G é uma árvore, então $m = n - 1$ e $f = 1$ (a face externa), logo $n - m + f = 2$.

Suponha então que G possui $m > n - 1$ arestas e que a asserção é válida para $m - 1$.

Seja e uma aresta de G que não é ponte e observe que em uma imersão plana I de G , a aresta e está na fronteira de duas faces distintas.

Considere $G' = G - e$ e a imersão plana I' de G' induzida por I e observe que I' possui uma face a menos que I .

Logo, pela hipótese de indução para G' , temos

$$n - m + f = |V(G)| - |E(G)| + |F(I)| = |V(G')| - (|E(G')| + 1) + |F(I') + 1| = 2.$$

$\square$

Corolário 4.6 Seja G é um grafo planar *simples* com n vértices e m arestas, tal que $n \geq 3$. Temos que $m \leq 3n - 6$.

Corolário 4.7 Todo grafo planar simples tem um vértice de grau no máximo 5.

Exercício 4.1. Seja ℓ a cintura de um grafo planar, e sejam n e m seus números de vértices e arestas, respectivamente. Mostre que

$$m \leq \frac{\ell}{\ell - 2}(n - 2).$$

Em particular, mostre que $m \leq 2n - 4$ quando tal grafo é bipartido.

Corolário 4.8 Os grafos completos K_5 e $K_{3,3}$ não são planares.

Exercício 4.2. Seja G um grafo planar de n vértices e cintura ℓ . Mostre que existe um vértice $v \in V(G)$ com grau

$$d(v) \leq \left\lfloor 2 \frac{\ell(n - 2)}{n(\ell - 2)} \right\rfloor.$$

Exercício 4.3. Verifique que todo subgrafo próprio de K_5 e de $K_{3,3}$ é planar.

4.1 MENORES

Sejam X e G dois grafos. Se o conjunto $\{V_x : x \in V(X)\}$ é uma partição de $V(G)$ tal que $G[V_x]$ é conexo para todo $x \in V(X)$, e se para quaisquer dois vértices x, y em X , existe uma aresta de V_x para V_y em G se e somente se $xy \in E(X)$, então dizemos que G é um MX . Denotamos por MX a classe dos grafos com essa propriedade. Por abuso de notação, podemos dizer $G = MX$, quando $G \in MX$. Os conjuntos V_x ($x \in V(X)$) são chamados **branch sets** dessa MX . Intuitivamente, X pode ser obtido de G pela contração de cada branch set. A proposição a seguir mostra que, neste caso X também pode ser obtido por uma sequência de contrações de arestas.

Proposição 4.9 O grafo G é um MX se e somente se X pode ser obtido de G por uma sequência de contrações de arestas, isto é, se e somente se existem grafos $G_0, \dots, G_p$ e arestas $e_i \in E(G_i)$ tais que $G_0 = G$, $G_p \cong X$ e $G_{i+1} = G_i/e_i$ para todo $i < p$.

Demonstração. Por indução em $|V(G)| - |V(X)|$. □

Se $G = MX$ é um subgrafo de um grafo Y , dizemos que X é um **menor** de Y e denotamos por $X \preceq Y$. Pela proposição 4.9, todo menor de um grafo G pode ser obtido de G pela remoção de vértices e arestas seguida da contração de arestas. Reciprocamente, todo grafo obtido de um grafo G através de remoções e contrações de arestas (em qualquer ordem) é um menor de G .

4.2 MENORES TOPOLÓGICOS

Se G pode ser obtido do grafo X a partir de uma série (possivelmente vazia) de subdivisões de arestas, dizemos que G é uma **subdivisão** de X . Denotamos por TX a classe dos grafos isomorfos a subdivisões de X . Por abuso de notação, podemos dizer $G = TX$, quando $G \in TX$. Se $G = TX$ é um subgrafo de um outro grafo Y , então dizemos que X é um **menor topológico** de Y e denotamos por $X \preceq_t Y$.

Dados os grafos X , G e H , dizemos que G é **homeomorfo a** H se existe um grafo X tal que G e H são ambos TX .

Proposição 4.10 A relação “homeomorfo a” é uma relação de equivalência sobre a classe dos grafos.

Assim, a classe de todos os grafos pode ser particionada de modo que dois grafos G e H pertençam à mesma parte quando são homeomorfos.

Exercício 4.4.

- (i) Todo TX é um MX . Logo, todo menor topológico de um grafo G é um menor de G .
- (ii) Se $\Delta(X) \leq 3$ então todo MX contém um TX . Logo, todo menor de grau máximo não maior que 3 de um grafo G é também um menor topológico de G .

Exercício 4.5. A relação $\preceq$ (X é um menor de Y) e a relação $\preceq_t$ (X é um menor topológico de Y) são relações de ordem parciais sobre a classe dos grafos finitos (isto é, são reflexivas, anti-simétricas e transitivas).

Exercício 4.6. Prove que a relação de menor topológico não é anti-simétrica se considerarmos grafos infinitos.

Proposição 4.11 Um grafo contém K_5 ou $K_{3,3}$ como *menor se e somente se* contém K_5 ou $K_{3,3}$ como *menor topológico*

Observação 4.12 Não é verdade que não ter K_5 como menor é equivalente a não ter K_5 como menor topológico.

Demonstração. Se G contém K_5 ou $K_{3,3}$ como menor topológico, então o Item i do Exercício 4.4 garante que G contém K_5 ou $K_{3,3}$ como menor.

O Item ii do Exercício 4.4 garante que se G contém $K_{3,3}$ como menor então G contém $K_{3,3}$ como menor topológico. Assim, nos resta provar que se G contém K_5 como menor, então G contém K_5 ou $K_{3,3}$ como menor topológico.

Suponha que $G \succeq K_5$. Seja $H \subseteq G$ um subgrafo *minimal* de G tal que $H \succeq K_5$. Neste caso, todo branch set de H induz uma árvore em H , e entre quaisquer dois branch sets há exatamente uma aresta.

Seja V_x o branch set correspondente a $x \in K_5$. Seja T_x a árvore obtida tomando-se a subárvore de H induzida por V_x acrescida de 4 arestas, correspondentes às 4 arestas que ligam V_x a cada um dos outros branch sets.

Se $T_x \succeq_t K_{1,4}$ para todo branch set V_x , então segue que $H \succeq_t K_5$. Se algum T_x não contém $K_{1,4}$ como menor topológico, então tem exatamente 2 vértices de grau 3 em V_x . Contraindo V_x a esses 2 vértices, e todo outro branch set a um único vértice, obtemos um grafo com 6 vértices que contém o $K_{3,3}$ (Figura 4.4). Logo, $G \succeq K_{3,3}$, e portanto $G \succeq_t K_{3,3}$. $\square$

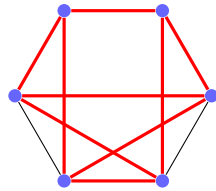


Figura 4.4: Grafo G após contraído de acordo com a demonstração.

O Teorema 3.13 e o Lema 4.13 serão usados na demonstração do teorema de Kuratowski.

Lema 4.13 Seja G um grafo e e uma aresta qualquer de G . Se G/e contém uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$, então G também contém uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$.

Demonstração. Seja $e = xy$ e z o vértice obtido pela identificação de x e y . Seja H uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$ contida em G/e . Se $z \neq V(H)$, então H é uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$ contida em G . Suponha então que $z \in V(H)$.

Seja H' um subgrafo de G tal que $H'/e = H$. Se z tem grau 2 em H , então claramente H' contém uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$. Podemos então assumir que o grau de z em H é pelo menos 3. Se x ou y tem grau 2 em H' , então H' tem uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$. Se isso não ocorre, então H é uma subdivisão de K_5 e ambos x e y devem ter grau 3 em H' . Neste caso, H' tem uma subdivisão de $K_{3,3}$. $\square$

Exercício 4.7. Se G é um grafo 3-conexo com pelo menos 5 vértices, então G contém uma aresta e tal que $G - e$ é uma subdivisão de um grafo 3-conexo. (Veja pp 231 em [Tho81]).

4.3 CARACTERIZAÇÕES DE GRAFOS PLANARES

Dado um grafo planar G é imediato que todo subgrafo de G é também planar. Isto é, um grafo que é obtido de um grafo planar através da operação de remoção de um vértice ou aresta é também planar. Por outro lado, se H' é uma subdivisão de um grafo não-planar, então H' também não é planar. Portanto, nenhum grafo planar pode conter uma subdivisão de um grafo não-planar. Assim, uma condição *necessária* para que um grafo G seja planar é que G não contenha uma subdivisão de K_5 nem de $K_{3,3}$. Kazimierz Kuratowski (1930) provou que esta condição é também *suficiente* para G ser planar.

Teorema 4.14 (Kuratowski, 1930). Um grafo G é planar se e somente se G não contém uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$.

Este resultado foi descoberto independentemente por Frink & Smith e Pontrjagin, e a versão do teorema restrita a grafos cúbicos foi descoberta independentemente por Menger (em 1930) (Veja [Tho81]).

O teorema de Kuratowski apresenta uma caracterização de grafos planares em termos de um número essencialmente finito de subgrafos proibidos. Assim, ocupa uma posição de destaque entre os critérios de planaridade conhecidos, não apenas pela sua beleza e simplicidade, mas também porque implica facilmente o critério de planaridade de MacLane (1937) e o de Whitney (1932), além de outros. Diferentemente de outros critérios de planaridade, fornece uma caracterização útil de grafos não planares, pois aparentemente quase todas as provas conhecidas do teorema podem ser transformadas em algoritmos polinomiais para testar planaridade de grafos. Hopcroft & Tarjan [HT74] desenvolveram um algoritmo linear para testar planaridade.

Um grafo conexo sem vértices-de-corte é chamado **bloco**. Um **bloco de um grafo** é um subgrafo que é um bloco e é maximal com relação a essa propriedade.

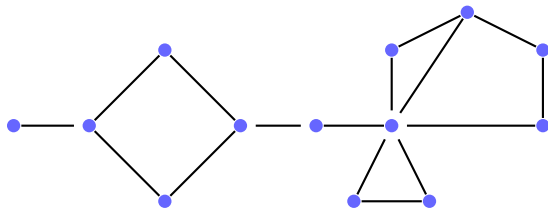


Figura 4.5: Grafo com 6 blocos: três K_2 , circuitos C_3 e C_4 e um bloco com 5 vértices. Blocos são grafos conexos sem vértices de corte.

Demonstração do Teorema de Kuratowski, veja [NC88]. Provaremos

por indução em $n = |V(G)|$ que se G não contém uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ então G é planar. Como $K_5 - e$ é planar para qualquer aresta e em K_5 , a afirmação é verdadeira se $n \leq 5$. Suponha então que G tem $n \geq 6$ vértices e que a afirmação é verdadeira para grafos com menos de n vértices. Dividimos a prova em dois casos dependendo se G é ou não 3-conexo.

Suponha que G não é 3-conexo. É imediato que um grafo é planar se e somente se cada um de seus blocos (subgrafos 2-conexos maximais) é planar; Podemos então assumir que G seja 2-conexo. Neste caso, G tem um par-separador $\{x, y\}$.

Seja H_1 uma componente de $G - \{x, y\}$ e $H_2 = G - \{x, y\} - V(H_1)$. Tome $G_1 = G - V(H_1)$ e $G_2 = G - V(H_2)$. Claramente G_1 e G_2 têm menos vértices do que G , e também não contém subdivisões de K_5 e nem de $K_{3,3}$. Logo, pela hipótese de indução, G_1 e G_2 são planares. Além disso, ambos têm uma imersão plana na qual a aresta xy pertence à fronteira da face externa. Estas duas imersões planas podem ser acopladas em x e y de modo a produzir uma imersão plana de G . Portanto, G é planar.

Suponha então que G é 3-conexo. Pelo teorema 3.13 concluímos que G tem uma aresta $e = xy$ tal que G/e é 3-conexo. Seja z o vértice obtido indentificando-se os vértices x e y . Pelo lema 4.13, G/e não contém uma subdivisão de K_5 e nem de $K_{3,3}$ e, portanto, pela hipótese de indução, G/e é planar. Considere um mapa de G/e e o subgrafo $G' = G/e - z$. Como G/e é 3-conexo, o corolário 4.4 garante que sua imersão plana é única.

Seja F a face do grafo plano G' tal que em G/e contém o vértice z em seu interior, e seja C o circuito facial que é a fronteira da face F . É imediato que todos os vizinhos de x ou y , exceto eles próprios, devem pertencer a C . Sejam $x_1, x_2, \dots, x_k$ os vizinhos de x que ocorrem em C em ordem cíclica, e seja P_i o caminho em C de x_i a x_{i+1} (onde $x_{k+1} = x_1$) que não contém nenhum x_j , com $j \neq \{i, i+1\}$. Se um destes caminhos

contém todos os vizinhos de y diferentes de x , então uma imersão plana de G pode ser obtida a partir da imersão de G/e , donde segue que G é planar (Figura 4.6a).

Analisemos então o caso em que nem todos os vizinhos de y , exceto x , estão contidos em um único dos caminhos P_i . Como y tem 3 ou mais vizinhos incluindo x , há 3 possibilidades:

- (a) y tem 3 ou mais vizinhos em $\{x_1, \dots, x_k\}$ (Figura 4.6b);
- (b) y tem um vizinho u em $P_i - \{x_i, x_{i+1}\}$ para algum i e um vizinho v não pertencente a P_i (Figura 4.6c);
- (c) y tem 2 vizinhos x_i e x_j tais que $|i - j| \neq 1$ (Figura 4.6d).

No caso (a) o subgrafo de G induzido pelos vértices de C juntamente com x e y contém uma subdivisão de K_5 . Nos casos (b) e (c), o subgrafo de G induzido pelos vértices de C juntamente com x e y contém uma subdivisão de $K_{3,3}$ (Veja figura 4.6). $\square$

O teorema de Wagner segue como corolário do teorema de Kuratowski.

Teorema 4.15 (Wagner, 1937). Um grafo G é planar se e somente se G não contém K_5 nem $K_{3,3}$ como menores.

Demonstração. Basta usar o teorema de Kuratowski e a proposição 4.11. $\square$

Caracterização de MacLane

Dado um grafo $G = (V, E)$, um **ciclo** de G é um subgrafo de G cujos vértices possuem todos grau par. Seja $\mathcal{E}_G$ o conjunto dos subconjuntos de E . O par $(\mathcal{E}_G, \Delta)$ é um espaço vetorial sobre $GF_2 = \{0, 1\}$, onde a operação Δ é a *diferença simétrica*, definida por

$$F_1 \Delta F_2 = (F_1 \setminus F_2) \cup (F_2 \setminus F_1).$$

Assim, podemos ver um subconjunto de arestas F de E como seu vetor característico $\chi^F \in \{0, 1\}^m$, onde $\chi_i^F = 1$ se e somente se $e_i \in F$.

O subespaço $(\mathcal{C}_G, \Delta)$ de $(\mathcal{E}_G, \Delta)$ gerado pelos *circuitos* de G é dito o **espaço dos ciclos** de G . Afirmamos que se G é conexo, então a dimensão de $\mathcal{C}_G$ é $\dim(\mathcal{C}_G) = m - n + 1$. Para observar isso, fixe uma árvore geradora T de G . Para cada $e \in E \setminus E(T)$ seja C_e o circuito fundamental de e com respeito a T . O conjunto $\mathcal{B} = \{C_e \mid e \in E \setminus E(T)\}$ dos circuitos fundamentais com respeito a T é independente, isto é, se C é o circuito fundamental de e com respeito a T , então C é o único destes circuitos fundamentais que contém e e, portanto, não pode ser gerado pelos demais circuitos em $\mathcal{B}$. Vamos provar que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{C}_G$.

Lema 4.16 Se T é uma árvore geradora de G e C_e é o circuito fundamental de e com respeito a T , para cada $e \notin E(G) \setminus E(T)$, então $\mathcal{B} = \{C_e : e \in E \setminus E(T)\}$ é uma base de $\mathcal{C}_G$.

Demonstração. Já vimos que os elementos de $\mathcal{B}$ são linearmente independentes. Vamos provar que os elementos de $\mathcal{B}$ podem gerar qualquer ciclo H . Suponha que $E(H) = \{e_1, \dots, e_j, e_{j+1}, \dots, e_k\}$ e suponha que $e_1, \dots, e_j \in E(T)$, $e_{j+1}, \dots, e_k \notin E(T)$.

Seja $F = C_{e_{j+1}} \Delta C_{e_{j+2}} \Delta \dots \Delta C_{e_k}$. O subgrafo $F \subseteq G$ é um ciclo e $H \Delta F$ é um ciclo tal que $E(H \Delta F) \subseteq E(T)$. Mas T é uma árvore. Logo, temos que $H \Delta F = \emptyset$. Isto é, $H = F$. Portanto, H pode ser gerado por $\mathcal{B}$. $\square$

Uma base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}_G$ é dita uma **2-base** de G se cada aresta de G pertence a no máximo 2 elementos de $\mathcal{B}$. Se G é planar, então G tem uma 2-base. Basta considerar uma imersão plana de G e tomar os circuitos faciais dessa imersão, excluindo a face externa. Note que, pela fórmula de Euler, há precisamente $m - n + 1$ tais circuitos.

Iremos mostrar que se G não é planar, então G não tem uma 2-base. O teorema de Kuratowski 4.14 garante que se G não é planar, então G contém uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$. O seguinte lema nos reduz a prova para o caso onde G é uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$.

Lema 4.17 Seja G um grafo e seja f uma aresta de G . Se G tem uma 2-base, então $G - f$ tem uma 2-base.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma 2-base de G .

Se f for uma ponte de G , então trivialmente $\mathcal{B}$ é uma 2-base de $G - f$.

Caso contrário f está contida em um ou dois circuitos de $\mathcal{B}$. Se f está contida em apenas um circuito C_f de $\mathcal{B}$, então $\mathcal{B} \setminus \{C_f\}$ é uma 2-base de $G - f$.

Caso contrário, seja $\mathcal{B} = \{C_1, \dots, C_k\}$ e suponha que $f \in C_1, f \in C_2$. Seja $C' = C_1 \triangle C_2$ e tome $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{C_1, C_2\} \cup \{C'\}$ e observe que esse conjunto é linearmente independente. Também sabemos que $|\mathcal{B}'| = |\mathcal{B}| - 1$ e, portanto, $\mathcal{B}'$ é uma base de $G - f$. $\square$

Exercício 4.8. Em que momento na demonstração acima foi usado a hipótese de que G é um grafo 2-aresta-conexo?

Lema 4.18 K_5 não tem uma 2-base.

Demonstração. Suponha que K_5 tenha uma 2-base $\mathcal{B}$. Então $|\mathcal{B}| = 10 - 5 + 1 = 6$. Suponha que $\mathcal{B} = \{C_1, C_2, \dots, C_6\}$. Temos para todo $i = 1, \dots, 6$ que $|C_i| \geq 3$. Logo, $\sum_{i=1}^6 |C_i| \geq 18$. Como $\mathcal{B}$ é uma 2-base, então pelo menos 8 arestas pertencem a 2 circuitos. Seja $C = C_1 \triangle C_2 \cdots \triangle C_6$. Então C tem no máximo 2 arestas, uma contradição. $\square$

Corolário 4.19 Se G é uma subdivisão de K_5 então G não tem uma 2-base.

Exercício 4.9. Prove que se G é uma subdivisão de $K_{3,3}$ então G não tem uma 2-base.

Corolário 4.20 (Teorema de MacLane, 1937). Um grafo é planar se e somente tem uma 2-base.

Demonstração. Já vimos que se G é planar, então G tem uma 2-base, então basta provar a recíproca.

Seja então G um grafo que possui uma 2-base e vamos provar que G é planar. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que G é 2-conexo. O lema 4.17 nos diz então que todo subgrafo 2-aresta-conexo de G possui uma 2-base. Portanto, como todo $TK_{3,3}$ e todo TK_5 é 2-aresta-conexo, então G não possui $K_{3,3}$ nem K_5 como menores. Portanto pelo Teorema de Kuratowski 4.14, G é planar. $\square$

Caracterização de Whitney

Seja G um grafo conexo. O subespaço $(\mathcal{D}_G, \Delta)$ de $(\mathcal{E}_G, \Delta)$ gerado pelos cortes (também chamados de *cociclos*) de G é o **espaço dos cociclos** de G . Observe que qualquer corte $\delta(U)$ onde $U \subseteq V(G)$ pode ser escrito como a diferença simétrica dos cortes dos vértices, isto é: se $U = \{v_1, \dots, v_k\}$, então $\delta(U) = \delta(v_1) \Delta \cdots \Delta \delta(v_k)$

O conjunto dos cortes dos vértices não é linearmente independente pois $\delta(v_1) = \delta(v_2) \Delta \cdots \Delta \delta(v_n)$, mas o conjunto $\{\delta(v) \mid v \in V - u\}$ para cada $u \in V$ é uma base de $\mathcal{D}_G$. Logo, $\dim(\mathcal{D}_G) = n - 1$ e, portanto, temos que $\dim(\mathcal{D}_G) + \dim(\mathcal{C}_G) = m$, que é a dimensão do espaço de arestas de G . Provamos abaixo que $\mathcal{D}_G$ é ortogonal a $\mathcal{C}_G$.

Proposição 4.21 Os subespaços $\mathcal{C}_G$ e $\mathcal{D}_G$ são ortogonais.

Demonstração. Basta usarmos o produto interno. Se F é um corte e H é um ciclo, então

$$\langle F, H \rangle = \sum_{i=1}^m (X_i^F \cdot X_i^H) = |F \cap H| = 0$$

Uma vez que a interseção de um corte com um ciclo é sempre um número par de arestas, resta observar que o produto interno é exatamente esta interseção. Isto é, $X_i^F \cdot X_i^H = 1$ se e somente se a aresta i está tanto em F quanto em H . $\square$

Note que, como $\dim \mathcal{C}_G + \dim \mathcal{D}_G = \dim \mathcal{E}_G$, temos que:

$$\mathcal{C}_G = (\mathcal{D}_G)^\perp \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_G = (\mathcal{C}_G)^\perp.$$

Dado um grafo plano G com conjunto de faces $F \subseteq \mathcal{E}_G$, o **dual geométrico** de G , denotado por G^* , é o multigrafo que tem F como conjunto de vértices e tal que para cada aresta $e \in E$ contida nos circuitos faciais das faces $f_1, f_2 \in F$, existe uma aresta $g_e = f_1 f_2 \in E(G^*)$ (Veja a Figura 4.7a). A função $\pi_G: E(G) \rightarrow E(G^*)$, definida por $\pi_G(e) = g_e$ é uma bijeção natural entre as arestas de G e G^* . Observe que o dual geométrico de um grafo pode conter laços e arestas paralelas, isto é, se a aresta $e \in E$ é uma ponte em G , então g_e é um laço em G^* ; e se duas faces compartilham duas ou mais arestas em G , estas arestas são paralelas em G^* (Veja a Figura 4.7b).

Proposição 4.22 Se G é um grafo plano e G^* é o seu dual geométrico, então C é um ciclo (respectivamente cociclo) de G se e somente se $\pi_G(C)$ é um cociclo (respectivamente ciclo) de G^* .

Um par de grafos G e G^c é um par **dual combinatório** se existe uma bijeção $E(G) \rightarrow E(G^c)$ tal que C é um *ciclo* de G se e somente se $f(C)$ é um *cociclo* de G^c . Nesse caso, também dizemos que G^c é um dual combinatório de G . É imediato que se G é planar, então o par de grafos G e G^* é um par dual combinatório.

Lema 4.23 Se G tem um dual combinatório G^c , então todo bloco de G possui um dual combinatório.

Demonstração. Seja f uma bijeção entre $E(G)$ e $E(G^c)$ que induz uma bijeção entre ciclos de G e cociclos de G^c .

Seja B um bloco de G e $H = G^c[f(E(B))]$. É imediato que $f|_{E(B)}$ leva ciclos de B em cociclos de H .

Vamos mostrar que, para todo cociclo D de H , temos que D é cociclo de G^c .

Suponha que não e seja D' um cociclo de G^c que contém D mas não está contido em $E(H)$. Certamente $C = G[f^{-1}(D)]$ não é um ciclo de G , então C possui pelo menos um vértice de grau ímpar. Podemos então adicionar sucessivamente arestas de $f^{-1}(D')$ a vértices de grau ímpar até que a quantidade dos mesmos diminua.

Dessa forma existe um circuito de G que possui arestas de $E(B)$ e $E(G) \setminus E(B)$, o que contradiz o fato de B ser um bloco. Portanto, todo cociclo de H é cociclo de G , logo sua preimagem tem de ser um ciclo (de B). $\square$

Whitney provou que vale a recíproca, isto é, se G tem um dual combinatório, então G é planar.

Teorema 4.24 (Whitney). Um grafo é planar se e somente se tem dual combinatório.

Demonstração. Seja G um tal grafo. Suponha sem perda de generalidade que G é 2-conexo. Logo, quaisquer duas arestas e, e' de G pertencem a um mesmo circuito. Note que um circuito C é um ciclo minimal e, portanto, $f(C)$ é um cociclo minimal.

Afirmamos que G^c é 2-conexo. Suponha que não seja 2-conexo. Logo, G^c tem vértice de corte v e então existem G_1^c e G_2^c tais que $E(G^c) = E(G_1^c) \cup E(G_2^c)$. Tome e e e' em G_1^c e G_2^c , respectivamente. Como G é 2-conexo, temos que $f^{-1}(e)$ e $f^{-1}(e')$ estão em um mesmo circuito C de G . Porém, isso é uma contradição, já que $f(C)$ deveria ser um cociclo minimal, mas $f(C) \cap E(G_1^c)$ é um cociclo menor. Portanto, G^c é 2-conexo.

Logo, para todo $v \in V(G^c)$, temos que $\delta(v)$ é um corte *minimal* em G^c .

Seja $u \in V(G^c)$. Neste caso, $\mathcal{B} = \{\delta(v) : v \in V(G^c) \setminus \{u\}\}$ é uma base do espaço dos cociclos de G^c . Cada $\delta(v)$ corresponde a um circuito

em G . O conjunto de tais circuitos define uma 2-base de G . Pelo teorema de MacLane, G é planar. $\square$

4.4 EXERCÍCIOS

Exercício 4.10. Considere o grafo G obtido pela adição de uma aresta qualquer a um grafo planar maximal de ordem pelo menos 6. Mostre que G contém um TK_5 e um $TK_{3,3}$. Ou seja, G sempre contém uma subdivisão de K_5 e de $K_{3,3}$.

Exercício 4.11. Para quais $n \geq 3$ a roda (wheel) W_n é exoplanar? Justifique.

Exercício 4.12. Um grafo é **exoplanar** (**outerplanar**) se tem uma representação plana na qual todo vértice fica na fronteira da face externa. Mostre que um grafo é exoplanar se e só se não contém nem o K_4 e nem o $K_{2,3}$ como menores.

Exercício 4.13. Faça ao menos duas provas distintas para a seguinte afirmação.

Considere uma triangulação plana G e uma coloração arbitrária de seus vértices em 3 cores. (Nessa coloração vértices adjacentes podem ter cores iguais.) Dizemos que uma face é tricolorida se os vértices de sua fronteira estão coloridos com 3 cores distintas. Prove que G tem um número par de faces tricoloridas.

Exercício 4.14. Leia o artigo [Mak97]. Rescreva-o à sua maneira, preferencialmente em inglês. Não é para copiar ou fazer uma tradução ao pé da letra. Comente o artigo.

Exercício 4.15. Estudar e entender a prova em [Tho81].

4.5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [HT74] John Hopcroft and Robert Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of the ACM (JACM)*, 21(4):549–568, 1974.
- [Mac37] Saunders MacLane. A combinatorial condition for planar graphs. *Fund. Math*, 28:22–32, 1937.
- [Mak97] Yury Makarychev. A short proof of kuratowski’s graph planarity criterion. *J. Graph Theory*, 25:129–131, 1997.
- [NC88] Takao Nishizeki and Norishige Chiba. *Planar graphs: Theory and algorithms*, volume 140. North Holland, 1988.
- [Tho81] Carsten Thomassen. Kuratowski’s theorem. *Journal of Graph Theory*, 5:225–241, 1981.

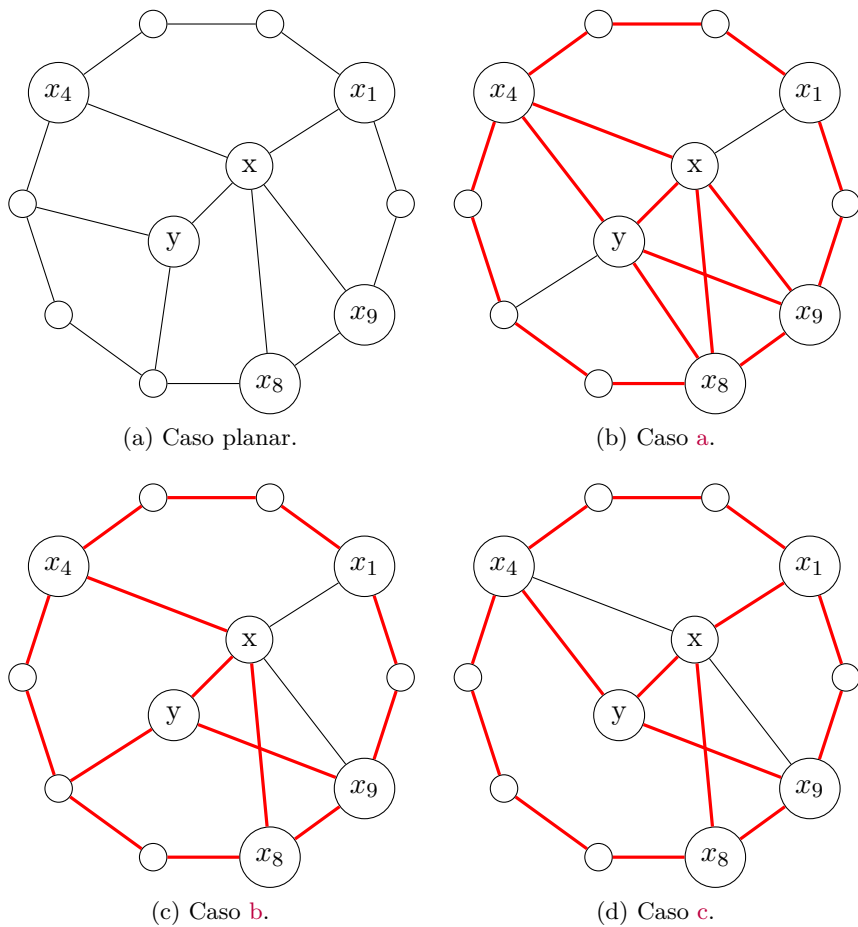


Figura 4.6: Diferentes casos da demonstração do Teorema de Kuratowski.

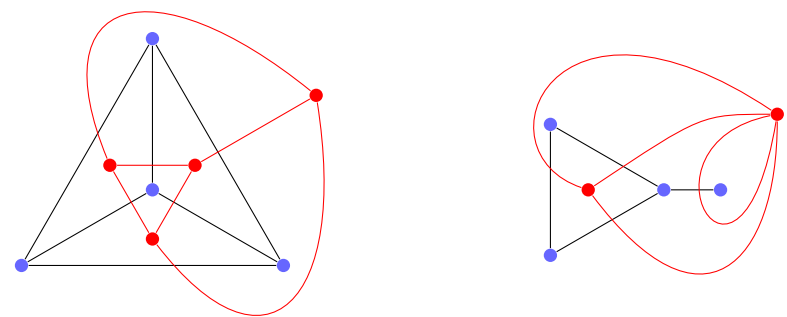


Figura 4.7: Exemplo de dual geométrico.