

3 CONEXIDADE

Seja G um grafo. Dizemos que G é k -**conexo** se, para todo $S \subseteq V(G)$ e $|S| < k$, temos que o grafo $G - S$ é conexo e possui ao menos dois vértices.

Analogamente, dizemos que G é k -**aresta-conexo** se, para todo $F \subseteq E(G)$, com $|F| < k$, temos que $G - F$ é conexo e possui ao menos dois vértices.

Além disso, convencionamos que todo grafo é 0-conexo e 0-aresta-conexo.

Finalmente, definimos a **conexidade** de G (**connectivity of G**), denotada por $K(G)$, como o maior natural k tal que G é k -conexo e definimos a **aresta-conexidade** de G (**edge connectivity of G**), denotada por $K'(G)$, como o maior natural k tal que G é k -aresta-conexo.

Exercício 3.1. Mostre que $K(G) \leq K'(G) \leq \delta(G)$.

Para provar as várias versões do teorema de Menger, vamos agora considerar digrafos (grafos orientados), em particular, permitimos aqui arestas múltiplas. Note que isso é diferente de uma **orientação** de um grafo, quando partimos de um grafo e orientamos suas arestas.

Para facilitar a notação, se G é um grafo (ou digrafo) e s e t são dois de seus vértices, então chamamos de **st -caminho** qualquer caminho (orientado, no caso de digrafos) de s a t .

Um digrafo D é dito **fortemente conexo** se para quaisquer dois vértices u, v existe em D um uv -caminho (isto significa que existe também um vu -caminho).

Além disso, definimos k -conexidade forte, k -aresta-conexidade forte, $K(D)$ e $K'(D)$ analogamente, trocando “conexo” por “fortemente conexo”.

Finalmente, se G é um grafo conexo (ou digrafo fortemente conexo) e $S \subseteq V(G)$ é tal que $G - S$ é desconexo, então dizemos que S é um



Figura 3.1: Um st -caminho, *i.e.*, um caminho orientado de s para t . Os arcos em um tal caminho devem ter “mesma” orientação.

conjunto separador de G .

3.1 TEOREMA DE Menger

O teorema de Menger caracteriza a noção de conexidade através de caminhos disjuntos.

Teorema 3.1 (Menger, 1927). Seja $D = (V, E)$ um digrafo, $s, t \in V$, e $s \neq t$. O número *máximo* de st -caminhos em D disjuntos nos arcos é igual ao número *mínimo* de arcos cuja remoção destrói todos os st -caminhos.

A prova tradicional é por *maxflow*. Faremos outra. Se $X \subseteq V$, denotamos por $\delta^+(X)$ o conjunto dos arcos de D que saem de X (*i.e.*, têm a cauda em X e a cabeça em $\bar{X} = V \setminus X$). Chamamos $\delta^+(X)$ de **corte de X** ; dizemos que X é um **corte st -separador** se $s \in X$ e $t \in \bar{X}$.

Demonstração. A seguinte prova é devido a András Frank, e usa funções submodulares definidas abaixo.

Primeiramente, uma função $f : 2^X \mapsto \mathbb{R}$ das partes de X nos reais é dita **submodular** se $f(U \cup V) + f(U \cap V) \leq f(U) + f(V)$. Se há igualdade em vez de “ \leq ” a função é **modular**, e se há “ \geq ” a função é **supermodular**.

O teorema 3.1 é um corolário do seguinte.

Teorema 3.2 Seja $D = (V, E)$ um digrafo, $s, t \in V$, e $s \neq t$. Em D existem pelo menos k st -caminhos disjuntos nos arcos se e só se $\delta^+(X) \geq k$ para todo $X \subseteq V$ que é corte st -separador (i.e., $s \in X$ e $t \notin X$).

Vamos provar inicialmente que o teorema 3.2 de fato implica o teorema 3.1.

Seja k o número máximo de st -caminhos disjuntos nos arcos, então, pelo teorema 3.2, existe um $X \subseteq V$ corte st -separador tal que $\delta^+(X) < k + 1$. A remoção de $\delta^+(X)$ certamente desconecta s de t . Por outro lado a remoção de $k - 1$ arestas certamente não desconecta s de t , pois todo corte X st -separador passa a ter ao menos um arco em $\delta^+(X)$.

Vamos agora provar o teorema 3.2.

Suponha que D é k -conexo, então cada corte intercepta ao menos uma aresta de cada caminho, e os caminhos são disjuntos, donde $|X| \geq k$.

Exercício 3.2. Mostre que a função $f(X) = |\delta^+(X)|$ é submodular.

A prova da recíproca é por indução no número de arcos. Dizemos que um corte st -separador é **justo** se $|\delta^+(X)| = k$. Suponha que $|\delta^+(X)| \geq k$ para todo corte st -separador.

Observe que

$$|\delta^+(X)| + |\delta^+(Y)| \geq |\delta^+(X \cup Y)| + |\delta^+(X \cap Y)| \geq k + k.$$

Donde segue que se X e Y são justos, então $X \cup Y$ e $X \cap Y$ são justos.

Vamos supor que todo arco de D pertence a um conjunto justo (senão podemos deletá-lo e usar a hipótese indutiva).

Tome $v \neq s$ e X tais que $vt \in \delta^+(X)$ e X é justo (Figura 3.2). Observe que se não existisse tal v , então todos os arcos de D seriam da forma st e o resultado seguiria trivialmente.

Seja S a interseção de todos os conjuntos justos X tais que $\delta^+(X)$ contém vt (note que S é justo). Vamos provar que existe $u \in S$ com $uv \in E(D)$.

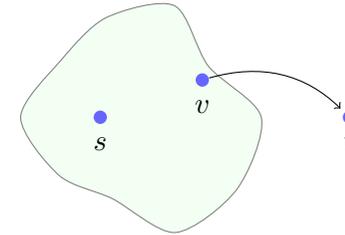


Figura 3.2: Exemplo de escolha do vértice v e do conjunto justo X da demonstração do Teorema 3.2.

Suponha que não há tal u e observe que $\delta^+(S \setminus \{v\})$ deve possuir ao menos k arcos pois $S \setminus \{v\}$ é corte st -separador, mas isso significa que $\delta^+(S)$ possui ao menos $k + 1$ arcos, o que contradiz sua definição.

Tomemos então $u \in S$ com $uv \in E(D)$ e D' o digrafo definido a partir de D removendo os arcos uv e vt e incluindo um novo arco ut (Figura 3.3), note que essa operação poderá gerar arcos múltiplos.

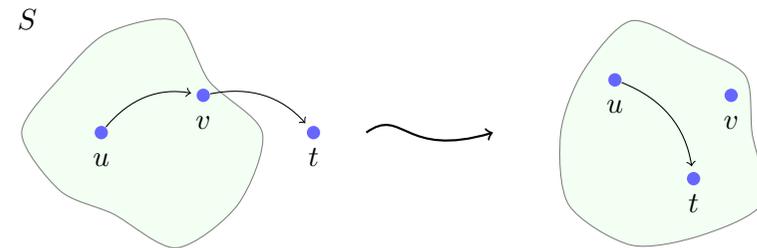


Figura 3.3: À esquerda, um exemplo de digrafo D da demonstração do Teorema 3.2. À direita, o digrafo D' construído.

Certamente $|E(D')| = |E(D)| - 1$. Vamos mostrar que D' satisfaz a hipótese do teorema.

Tome X um corte st -separador em D' arbitrário e suponha por absurdo que $|\delta_{D'}^+(X)| < k$.

Observe que, se $u, v \notin X$, então $\delta_{D'}^+(X) = \delta_D^+(X)$, logo $|\delta_{D'}^+(X)| \geq k$.

Por outro lado, se $u \in X$ e $v \notin X$, então também temos $|\delta_{D'}^+(X)| = |\delta_D^+(X)| \geq k$, já que a remoção do arco uv foi compensada pela adição do arco ut .

O mesmo vale para o caso $u, v \in X$, pois a remoção do arco vt foi compensada pela adição do arco ut .

Resta apenas o caso $u \notin X$ e $v \in X$. Mas então $k > |\delta_{D'}^+(X)| = |\delta_D^+(X)| - 1 \geq k$, logo $|\delta_D^+(X)| = k$, i.e. X é justo em D . Observe que $vt \in \delta_D^+(X)$, mas X não contém u , o que contradiz a escolha de S , pois $u \in S$.

Portanto podemos aplicar a hipótese indutiva para D' , então temos k st -caminhos em D' disjuntos nos arcos. Para obter os st -caminhos em D , basta substituir o arco adicionado ut pelos arcos removidos uv e vt . \square

A partir do teorema 3.1, podemos deduzir as seguintes outras versões.

Teorema 3.3 Seja $D = (V, E)$ um digrafo, $s, t \in V$, $s \neq t$ e $st \notin E$. O número *máximo* de st -caminhos em D internamente disjuntos nos vértices é igual ao número *mínimo* de vértices em $V \setminus \{s, t\}$ cuja remoção destroi todos os st -caminhos.

Demonstração. Certamente não há como destruir todos os st -caminhos removendo menos vértices do que o número máximo de st -caminhos.

Considere D' o digrafo tal que $V(D') = \{v^+ : v \in V(D)\} \cup \{v^- : v \in V(D)\}$ e $E(D') = \{x^+y^- : xy \in E(D)\} \cup \{v^-v^+ : v \in V(D)\}$.

Observe que caminhos disjuntos nos arcos em D' correspondem a caminhos internamente disjuntos nos vértices em D .

Além disso, remover um vértice v de D corresponde a remover o arco v^-v^+ de D' .

Logo o teorema 3.1 aplicado a D' nos dá o resultado para D . \square

Teorema 3.4 Seja $G = (V, E)$ um grafo, $s, t \in V$, e $s \neq t$. O número *máximo* de st -caminhos disjuntos nas arestas em D é igual ao número *mínimo* de arcos cuja remoção destroi todos os st -caminhos.

Demonstração. Seja D o digrafo obtido a partir de G trocando cada aresta uv pelos arcos (u, v) e (v, u) . Porém, não basta apenas aplicar o teorema para o digrafo e remover a orientação dos arcos, pois nada impede que ambos os arcos do par sejam usados, cada uma por um caminho diferente.

Para resolver esse problema, consideramos o digrafo induzido pelos arcos contidos nos caminhos e adicionamos k arcos da forma ts , observe que todo vértice desse digrafo possui grau de entrada igual ao grau de saída e que essa propriedade é mantida se eliminarmos todos os pares de arcos (u, v) e (v, u) sucessivamente correspondentes a orientações opostas de uma mesma aresta.

Ao final desse procedimento, obtemos um digrafo D' euleriano pelo teorema 1.7. Cada seção da trilha euleriana entre duas ocorrências sucessivas de arcos da forma ts corresponde a um dos k st -caminhos. \square

Teorema 3.5 Seja $G = (V, E)$ um grafo, $s, t \in V$, $s \neq t$ e $st \notin E$. O número *máximo* de st -caminhos em G internamente disjuntos nos vértices é igual ao número *mínimo* de vértices em $V \setminus \{s, t\}$ cuja remoção destroi todos os st -caminhos.

Demonstração. Análoga à prova do teorema 3.3, mas usando o teorema 3.4 ao invés do teorema 3.1. \square

A partir dos teoremas 3.1, 3.3, 3.4 e 3.5, seguem os seguintes corolários.

Corolário 3.6 Um digrafo D é k -fortemente-arco-conexo se e somente se para todo par de vértices distintos v e w existem k caminhos orientados disjuntos nos arcos de v a w .

Corolário 3.7 Um digrafo D é k -fortemente-conexo se e somente se para todo par de vértices distintos v e w existem k caminhos orientados internamente disjuntos nos vértices de v a w .

Corolário 3.8 Um grafo G é k -aresta-conexo se e somente se para todo par de vértices distintos v e w existem k caminhos disjuntos nas arestas de v a w .

Corolário 3.9 Um grafo G é k -conexo se e somente se para todo par de vértices distintos v e w existem k caminhos internamente disjuntos nos vértices de v a w .

3.2 2-CONEXIDADE E 2-ARESTA-CONEXIDADE

Seja G um grafo e H um subgrafo de G , um H -caminho em G é um caminho P em G não-trivial que intersecta H precisamente nos seus extremos. Dado um grafo G e um subgrafo $H \subseteq G$, uma H -orelha é um H -caminho ou um circuito em G onde *exatamente um* de seus vértices pertence a H .

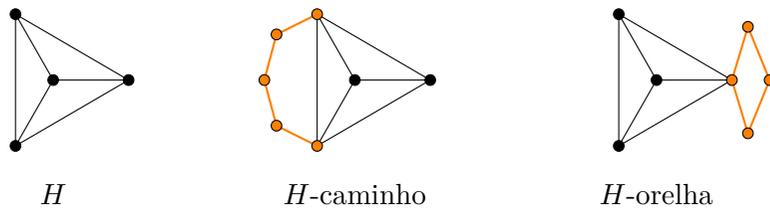


Figura 3.4: Exemplo de H -caminho e H -orelha.

Observação: Para diferenciar os dois tipos de H -orelhas há autores que usam os termos "open ear" e "closed ear" quando é um circuito.

Um vértice v de um grafo G é dito **vértice de corte** de G se existe uma partição de $E(G)$ em dois conjuntos não-vazios A e B tal que se $a \in A$ e $b \in B$ são arestas adjacentes, então ambas incidem em v .

No caso em que G é um grafo simples, então v é vértice de corte se e somente se a remoção do vértice v aumenta o número de componentes conexos.

Dada uma aresta $e = xy$ de um grafo G , o grafo obtido pela **subdivisão da aresta** e é o grafo obtido de G pela remoção da aresta e , e pela adição de um novo vértice w vizinho a x e y .

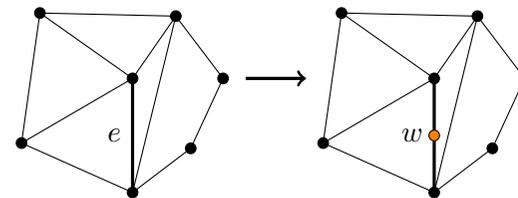


Figura 3.5: Exemplo de subdivisão da aresta e .

Dada uma aresta $e = xy$ de um grafo $G = (V, E)$, o grafo obtido pela **contração da aresta** e , denotado por G/e , é o grafo obtido de G pela remoção dos vértices x e y , e pela adição de um novo vértice v_e vizinho aos vizinhos de x e y em $G - x - y$. Dado um conjunto $U \subseteq V$ de um grafo G , o grafo obtido de G pela **contração do conjunto de vértices** U , denotado por G/U , é o grafo obtido de G pela remoção dos vértices de U , e pela adição de um novo vértice v_U vizinho aos vizinhos dos vértices de U em $G - U$.

Mais formalmente, dado um conjunto de vértices $U \subseteq V$, o grafo G/U é o grafo (V', E') onde

- $V' = (V \setminus U) \cup \{v_U\}$ ($v_U \notin V(G)$); e

- $E' = \{uv \in E : \{u, v\} \cap U = \emptyset\} \cup \{v'w : \text{existe } x \in U \text{ tal que } xw \in E \setminus E(G[U])\}$.

Observação: A contração de uma aresta $e = xy$ pode ser vista como um caso especial de contração de conjunto de vértices U onde $U = \{x, y\}$.

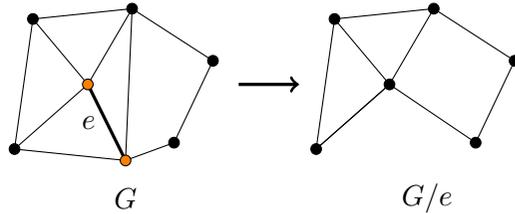


Figura 3.6: Exemplo de contração da aresta e .

Teorema 3.10 Seja G um grafo com ao menos 3 vértices. São equivalentes

- G é 2-conexo;
- Quaisquer dois vértices de G pertencem a um circuito comum;
- Quaisquer duas arestas de G pertencem a um circuito comum;
- G pode ser construído a partir de um circuito (não um laço) com a adição sucessiva de H -caminhos a grafos H já construídos (decomposição em orelhas que é “própria”).

Demonstração. (a \Leftrightarrow b) Consequência direta do teorema 3.5.

(b \Rightarrow c) Se e e f são duas arestas, subdivida cada uma em duas e observe que o grafo resultante G' é 2-conexo (pois não possui vértice de corte). Portanto, como a \Rightarrow b, então G' contém um circuito com ambos os vértices novos, o que significa que G possui um circuito contendo as duas arestas.

(c \Rightarrow d) Seja $G' \subseteq G$ um subgrafo construído como no item d com o maior número de arestas possível. Se $G' = G$, não há o que fazer.

Suponha então que G' é um subgrafo próprio de G .

Vamos mostrar que todo vértice v de G está em G' . Suponha, por absurdo, que não e tome em G um circuito C envolvendo uma aresta adjacente a v e alguma aresta de G' (existe devido a c). Tome então o caminho maximal nas arestas de $(G - G') \cap C$ que contém v e contém no máximo dois vértices em G' . Ele é um G' -caminho (note que a presença de uma aresta de G' em C garante que há mais de um vértice de G' em C), o que contradiz a maximalidade de G' .

Logo todo vértice de G está em G' .

Mas então G' é um subgrafo gerador de G , isso significa que toda aresta de G' que não é aresta de G é um G' -caminho, novamente contradizendo a maximalidade de G' .

(d \Rightarrow a) Consequência direta da construção de G : para desconectar G é necessário remover ao menos dois vértices (isso é verdade em um circuito e permanece verdade com a adição sucessiva de H -caminhos a G). \square

Teorema 3.11 Seja G um grafo com ao menos 3 vértices. São equivalentes:

- G é 2-aresta-conexo;
- Para quaisquer dois vértices de G existem dois caminhos arestas-disjuntos ligando-os;
- G é conexo e qualquer aresta de G pertence a um circuito;
- G pode ser construído a partir de um vértice com a adição sucessiva de H -orelhas a grafos H já construídos (decomposição em orelhas).
- G pode ser construído a partir de um circuito acrescentando sequencialmente arestas (podem ser laços) e subdividindo arestas;

Demonstração. (a \Leftrightarrow b) Consequência direta do teorema 3.4.

(b \Rightarrow c) Certamente todo par de vértices está conectado, logo G é conexo.

Além disso, se xy é aresta de G , então há dois caminhos disjuntos nas arestas entre x e y . Certamente um deles, digamos P , não usa a aresta xy . Mas então o circuito formado pela adição da aresta xy a P possui a aresta xy .

(c \Rightarrow d) Seja $G' \subseteq G$ um subgrafo construído como no item d com o maior número de arestas possível. Se $G' = G$, não há o que fazer.

Suponha então que G' é um subgrafo próprio de G .

Vamos mostrar que todo vértice v de G está em G' . Suponha, por absurdo, que não e tome em G um circuito C envolvendo uma aresta adjacente a v (existe devido a c). Tome então a trilha maximal nas arestas de $(G - G') \cap C$ que contém ve contém no máximo dois vértices de G' (note que tal trilha pode ser o circuito inteiro). Ela é uma G' -orelha, o que contradiz a maximalidade de G' .

Logo todo vértice de G está em G' .

Mas então G' é um subgrafo gerador de G , isso significa que toda aresta de G' que não é aresta de G é um G' -caminho (e conseqüentemente, uma G' -orelha), novamente contradizendo a maximalidade de G' .

(d \Rightarrow e) Basta observar que cada orelha da decomposição de G pode ser obtida adicionando uma aresta e subdividindo-a sucessivamente.

(e \Rightarrow a) Conseqüência direta da construção de G : para desconectar G é necessário remover ao menos duas arestas (isso é verdade em um circuito e permanece verdade com a adição sucessiva de arestas a G e com a subdivisão de arestas de G). \square

Teorema 3.12 (Lovász). Um grafo G é hipoemparelhável se e somente se G tem uma decomposição em orelhas ímpares, i.e. G pode ser obtido a partir de um vértice com a adição sucessiva de H -orelhas com número ímpar de arestas a grafos H já construídos.

Demonstração. Suponha que G é um grafo hipoemparelhável com menor número de arestas o possível que não pode ser obtido pelo procedimento

do teorema. Observe que G é conexo com um número ímpar de vértices (pois a remoção de qualquer vértice de G deve resultar em um grafo com apenas componentes conexos com número par de vértices) e certamente G não possui apenas um vértice.

Como G é hipoemparelhável, temos que $D_G = V(G)$ na decomposição de Edmonds–Gallai (teorema 2.9).

Seja M um emparelhamento máximo em G e observe que há apenas um vértice v em G que não é coberto por M . Como $D_G = V(G)$, sabemos que, se rodarmos o algoritmo da seção 2.5, obteremos seqüências $G_0, G_1, \dots, G_n, B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ e M_0, M_1, \dots, M_n tais que $G_0 = G$, $M_0 = M$, G_n possui apenas um vértice e , para todo $i < n$, B_i é um M_i -botão, $G_{i+1} = G_i/B_i$ e $M_{i+1} = M_i/B_i$.

Observe que, para todo $i < n$, temos que G_i é hipoemparelhável e que há apenas um vértice em G_i , digamos v_i descoberto em M_i . Isso significa que, para todo vértice t_i em G_i existe um caminho M_i -alternante $P_{t_i, i}$ de v_i a t_i em G_i de comprimento par.

Observe também que, para todo $i < n$, temos que cada caminho M_{i+1} -alternante em G_{i+1} com início em v_{i+1} corresponde a um caminho M_i -alternante em G_i com início em v_i .

Vamos provar que, para todo $i < n$, temos $G_i[V(B_i)] = B_i$.

Suponha que não, isto é, suponha que existe uma aresta $e \in G[V(B_i)] \setminus E(B_i)$, e note que todo caminho M_{i+1} -alternante de G_{i+1} pode ser transformado em um caminho M_i -alternante de $G_i - e$.

Mas então, a existência dos caminhos $P_{t_{i+1}, i+1}$ garante que, para todo vértice t_i de G_i existe um caminho M_i -alternante em $G_i - e$ de comprimento par de v_i a t_i , isso significa que $G_i - e$ é hipoemparelhável.

Tome então uma aresta f de G responsável pela existência de e em G_i e observe que, como $G_i - e$ é hipoemparelhável, temos que $G - e$ é hipoemparelhável. Pela minimalidade de G , sabemos que $G - e$ pode ser obtido pelo procedimento descrito no teorema, mas e forma uma $(G - e)$ -orelha de comprimento ímpar, contradizendo a escolha de G .

Logo, para todo $i < n$, temos $G_i[V(B_i)] = B_i$.

Vamos provar agora que, para todo $i < n$, não existem arestas distintas e e f em G_i que correspondem a uma mesma aresta de G_{i+1} .

Suponha que não e observe que $\{e, f\} \cap M_i = \emptyset$. Além disso, observe que e e f têm de ser adjacentes com suas pontas distintas no botão B_i . Novamente a existência dos caminhos $P_{t_{i+1}, i+1}$ garante que, para todo vértice t_i de G_i existe um caminho M_i -alternante em $G_i - e$ de comprimento par de v_i a t_i , isso significa que $G_i - e$ é hipoemparelhável.

Mais uma vez, tome então uma aresta g de G responsável pela existência de e em G_i e observe que, como $G_i - e$ é hipoemparelhável, temos que $G - e$ é hipoemparelhável. Pela minimalidade de G , sabemos que $G - e$ pode ser obtido pelo procedimento descrito no teorema, mas e forma uma $(G - e)$ -orelha de comprimento ímpar, contradizendo a escolha de G .

Para todo $i < n$, seja u_i o vértice de G_{i+1} proveniente da contração de B_i .

Certamente $n > 1$, caso contrário G seria um circuito ímpar (pois seria um botão), que pode ser obtido pelo procedimento descrito no teorema. Isso significa que, para todo $i < n - 1$, o vértice u_i possui grau pelo menos dois em G_{i+1} e certamente u_{n-2} possui grau dois em G_{n-1} . Seja então i_0 o menor i tal que u_i possui grau igual a 2 em G_{i+1} .

Como não há duas arestas em G_{i_0} correspondentes a uma mesma aresta de G_{i_0+1} e $G_{i_0}[B_{i_0}] = B_{i_0}$, sabemos que B_{i_0} possui exatamente dois vértices, digamos r_1 e r_2 de grau três em G_{i_0} . Note que um desses vértices não é coberto por $M_{i_0} \cap E(B_{i_0})$ e, sem perda de generalidade, suponha que esse vértice é r_1 .

Como B_{i_0} é um circuito ímpar, existe um caminho Q de r_1 a r_2 em B_{i_0} de comprimento ímpar.

Observe que u_{i_0} pertence a um botão B_j tal que $j > i_0$, logo existe um caminho M_{i_0+1} -alternante \tilde{R} de comprimento ímpar em G_{i_0+1} de v_{i_0+1} a u_{i_0} . Sabemos que \tilde{R} corresponde a um caminho M_{i_0} -alternante R de comprimento ímpar em G_{i_0} de v_{i_0} a r_2 .

Considere então o grafo $G' = G - (V(Q) \setminus \{r_1, r_2\})$ e vamos mostrar que para todo vértice t' de G' , existe um caminho M_{i_0} -alternante em G' de comprimento par de v_{i_0} a t' .

Caso 1. $t' \in V(G_{i_0+1})$. Nesse caso consideramos P_{t', i_0+1} e observamos que esse caminho corresponde a o caminho desejado em G' , usando o caminho Q para passar por B_{i_0} se necessário.

Caso 2. t' está no grafo $H = B_{i_0} - (V(Q) \setminus \{r_1, r_2\})$ e está a uma distância par em H de r_1 . Observe que o caminho testemunha dessa distância par é um caminho M_{i_0} -alternante. Por outro lado, sabemos que P_{r_1, i_0} não usa nenhum vértice de $Q - r_1$. Logo a concatenação desses dois caminhos gera o caminho desejado.

Caso 3. t' está no grafo $H = B_{i_0} - (V(Q) \setminus \{r_1, r_2\})$ e está a uma distância ímpar em H de r_1 . Isso significa que t' também está a uma distância ímpar de r_2 em H . Observe que o caminho testemunha dessa distância par a r_2 é um caminho M_{i_0} -alternante. Por outro lado, sabemos que R não usa nenhum vértice de $Q - r_2$. Logo a concatenação desses dois caminhos gera o caminho desejado.

Portanto, para todo vértice t' de G' , existe um caminho M_{i_0} -alternante em G' de comprimento par de v_{i_0} a t' . Isso significa que G' é hipoemparelhável e, pela minimalidade de G , sabemos que G' pode ser obtido pelo procedimento descrito no teorema, mas Q forma uma (G') -orelha de comprimento ímpar, contradizendo a escolha de G .

Para provar a recíproca, observe primeiramente que, como um vértice (K_1) é hipoemparelhável, basta provar que a adição de uma G -orelha a um grafo G hipoemparelhável preserva essa propriedade.

Então seja G um grafo hipoemparelhável e G' um grafo obtido a partir de G através da adição de uma G -orelha P com extremos u e w em G (esses vértices podem ser iguais).

Seja M um emparelhamento máximo em G e seja v o único vértice de G descoberto em M . Seja $M' = M \cup \tilde{M}$ onde \tilde{M} é o maior emparelhamento em P que deixa u e w descobertos.

Observe que M' é emparelhamento máximo em G' deixando apenas v descoberto e vamos provar que, para todo vértice t de G' , existe um caminho M' -alternante em G' de comprimento par de v a t .

Caso 1. t é vértice de G . Então, como G é hipoemparelhável, sabemos que existe caminho M -alternante em G de comprimento par de v a t e esse caminho também é caminho M' -alternante em G' .

Caso 2. t não é vértice de G . Então t pertence a P e como P tem comprimento ímpar, então t tem de estar a distância par em P de um vértice, digamos r , dentre u e w . Seja Q o caminho testemunha dessa distância par e observe que Q é M' -alternante.

Por outro lado, sabemos que r é vértice de G , então, como G é hipoemparelhável, sabemos que existe caminho M -alternante R em G de comprimento par de v a r . Daí a concatenação de R com Q nos dá o caminho desejado.

Portanto, para todo vértice t de G' , existe um caminho M' -alternante em G' de comprimento par de v a t , isso significa que G' é hipoemparelhável. □

Observação: Os teoremas [a](#) e [3.12](#) garantem que todo grafo hipoemparelhável é 2-aresta-conexo.

3.3 3-CONEXIDADE

Teorema 3.13 Se G é 3-conexo e $|V(G)| \geq 5$, então G tem uma aresta α tal que G/α é 3-conexo.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que o resultado não vale. Então para toda aresta $\alpha = xy \in E(G)$, existe $S \subseteq V(G/\alpha)$ com $|S| \leq 2$ tal que $G/\alpha - S$ é desconexo.

Observe que a cardinalidade de tais S é sempre dois, caso contrário G não seria 3-conexo, ou seja, G/α é sempre 2-conexo.

Além disso, o vértice v_{xy} resultante da contração de α pertence a S , caso contrário S seria subconjunto de $V(G)$ e $G - S$ seria desconexo. Seja então z o vértice de S que não é v_{xy} .

Observe que cada componente C de $G' - S$ é um subgrafo de G . Vamos mostrar agora que C está ligada a todos os vértices em $\{x, y, z\}$ em G . Suponha que C não está ligada a $t \in \{x, y, z\}$, então a remoção de $\{x, y, z\} \setminus t$ desconecta C do resto do grafo G , o que contradiz sua 3-conexidade. Logo C está ligada a todos os vértices em $\{x, y, z\}$.

Considere $\alpha \in E(G)$ e S' conjunto separador em G/α tais que a cardinalidade do menor componente de $G/\alpha - S'$ é a menor possível e seja $G' = G/\alpha$.

Seja C o menor componente conexo de $G' - S'$. Seja também $v \in V(C)$ um vizinho de z em G' e $\beta = vz$.

Vamos mostrar que C possui ao menos dois vértices. Suponha que não (i.e. $V(C) = \{v\}$) e considere o grafo G/β . Como $K(G/\beta) = 2$, sabemos que G/β possui um conjunto separador S_β de cardinalidade dois que contém o vértice v_β proveniente da contração de β . Isso significa que o conjunto $(S_\beta \cup z) \setminus v_\beta$ é separador em G , contradizendo sua 3-conexidade. Logo C possui pelo menos dois vértices.

Observe agora que, como $K(G/\beta) = 2$, sabemos que há um $w \in V(G)$ tal que $S = \{v, z, w\}$ é separador em G . Observe que todo componente de G/β está conectado a v em G . Mas então qualquer componente de G/β que não contém x (e conseqüentemente não contém y) está propriamente contido em C , pois deve ser vizinho de v . Isso contradiz a escolha de α (Figura [3.7](#)). □

Exercício 3.3. Estudar o que acontece com o teorema acima caso a hipótese $|V(G)| \geq 5$ seja removida. Em que momento(s) da demonstração essa hipótese foi usada?

Teorema 3.14 (Tutte, 1961). Um grafo é 3-conexo se e somente se existe uma sequência G_0, G_1, \dots, G_n de grafos com as propriedades

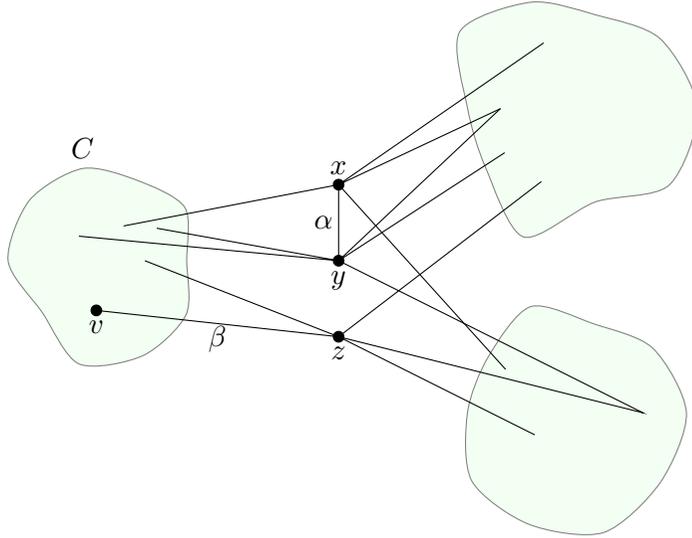


Figura 3.7: Exemplo de configuração dos componentes conexos de G na demonstração do Teorema 3.13.

- (a) $G_0 \cong K_4$ e $G_n \cong G$;
- (b) G_{i+1} tem uma aresta xy tal que $d(x) \geq 3$, $d(y) \geq 3$ e $G_i \cong G_{i+1}/xy$, para $i < n$.

Demonstração. Se G é um grafo 3-conexo, o teorema 3.13 nos garante que podemos sucessivamente encontrar uma aresta que pode ser contraída mantendo a 3-conexidade até chegar em um grafo com menos que cinco vértices. Como o único grafo (a menos de isomorfismo) 3-conexo com menos que cinco vértices é K_4 , o resultado segue.

Suponha que temos uma seqüência G_0, G_1, \dots, G_n satisfazendo as hipóteses mencionadas e vamos provar que para todo $i < n$, G_i é 3-conexo implica que G_{i+1} é 3-conexo.

Suponha que não e seja $i < n$ o menor possível tal que essa implicação é falsa. Sejam também $x, y \in V(G_{i+1})$ tais que $G_i \cong G_{i+1}/xy$. Então G_{i+1} possui um conjunto separador S com no máximo dois elementos.

Certamente $S \cap \{x, y\} \neq \emptyset$, caso contrário, S seria conjunto separador de G_i , contradizendo sua 3-conexidade. Por outro lado, se $S = \{x, y\}$, então o vértice v_{xy} resultante da contração de xy é vértice separador em G_i , o que também contradiria sua 3-conexidade.

Portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir que $x \in S$ e $y \notin S$.

Seja C_y o componente conexo de y em $G_{i+1} - S$ e observe que, como $d(y) \geq 3$, há ao menos um vértice, digamos w , em $C_y - y$. Mas isso significa que o conjunto $S - x + v_{xy}$ separa w do resto do grafo G_i , contradizendo sua 3-conexidade. \square

Uma **roda (wheel)** é um supergrafo $G = (V, E)$ de C_n :

- $V = V(C_n) \cup \{v\}$, e
- $E = E(C_n) \cup \{uv : u \in V(C_n)\}$,

onde $v \notin V(C_n)$.

Seja G um grafo e $v \in V(G)$. Um **splitting** de v (em G) é um grafo H tal que:

1. $V(H) = \{v', v''\} \cup (V(G) \setminus \{v\})$,
2. $E(H) \supseteq \{v'v''\} \cup (E(G) \setminus \{e \in E(G) : e \text{ incide em } v\})$,
3. $d_H(v') \geq 3$,
4. $d_H(v'') \geq 3$, e
5. $N_G(v) = (N_H(v') \cup N_H(v'')) \setminus \{v', v''\}$.

Observação: Um modo de generalizar o *splitting* é notar que nessa operação estamos trocando um vértice por K_2 . Podemos trocar um vértice por K_n , sob a restrição de cada vértice novo apresentar grau mínimo maior do que certo valor e a vizinhança deve ser distribuída entre os novos vértices.

Teorema 3.15 (Tutte). (Wheel Theorem) Um grafo é 3-conexo se e somente se ele pode ser obtido a partir de uma roda repetidamente

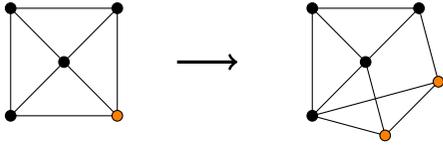


Figura 3.8: Exemplo de splitting.

acrescentando-se arestas ligando vértices não-adjacentes e/ou aplicando a operação de splitting.

Demonstração. Suponha que G é um grafo 3-conexo que não pode ser obtido a partir do procedimento descrito no teorema com o menor número de arestas o possível.

Certamente G possui pelo menos cinco vértices, pois o único (a menos de isomorfismo) grafo 3-conexo com menos de cinco vértices é K_4 . Mas então o teorema 3.13 nos garante que existe uma aresta α em G tal que $G' = G/\alpha$ é 3-conexo.

Seja v_α o vértice de G' proveniente da contração de α e observe que G' possui menos arestas que G . Pela minimalidade de G , sabemos que G' pode ser obtido pelo procedimento descrito no teorema.

Porém G é splitting de v_α em G' , o que é uma contradição.

Para provar a recíproca, como a adição de arestas preserva a 3-conexidade de um grafo, basta provar que a operação de splitting também preserva a 3-conexidade de um grafo.

Então sejam G um grafo 3-conexo, v um vértice de G e H um splitting de v em G e suponha por absurdo que H não é 3-conexo.

Então existe um S conjunto separador de H de cardinalidade menor ou igual a dois.

Certamente $S \cap \{v', v''\} \neq \emptyset$, caso contrário, S também seria conjunto separador em G . Além disso, sabemos que $S \neq \{v', v''\}$, caso contrário, v

seria vértice de corte em G . Finalmente, sabemos que S não possui apenas um vértice, caso contrário, esse vértice seria um dentre v' e v'' , o que significaria que v seria vértice de corte em G .

Sem perda de generalidade, suponha que $S = \{v', r\}$, com $r \neq v''$. Seja C o componente conexo de v'' em H . Observe que, como $\{v, r\}$ não é conjunto separador de G , temos que $H - (S \cup \{v''\})$ é conexo, o que significa que $V(C) = \{v''\}$, mas isso é um absurdo, pois v'' possui grau pelo menos 3 em H , ou seja, possui grau pelo menos 1 em C . \square

3.4 ALTA ARESTA-CONEXIDADE

Teorema 3.16 (Tutte). Se G é um multigrafo $2k$ -aresta-conexo, então G tem k árvores geradoras disjuntas nas arestas.

3.5 EXERCÍCIOS

Nos exercícios seguintes, suponha que os grafos considerados são simples.

Exercício 3.4. Prove que se G é um grafo 2-conexo com ao menos 4 vértices, então para toda aresta f de G temos que $G - f$ é 2-conexo ou G/f é 2-conexo.

Exercício 3.5. Prove que se G é um grafo 2-conexo tal que $\delta(G) \geq 3$, então G tem um vértice v tal que $G - v$ é 2-conexo.

Exercício 3.6. Seja G um grafo 2-conexo tal que $G - s - t$ é desconexo para quaisquer dois vértices não-adjacentes s, t . Prove que G é um circuito.

Exercício 3.7. Sejam $G = (V, E)$ um grafo e s, t dois vértices de G que distam d . Suponha que, para todo $S \subset V \setminus \{s, t\}$ tal que $|S| < k$, existe em $G - S$ um caminho entre s e t , de comprimento d . Mostre que em G existem k caminhos entre s e t , todos de comprimento d , que são vértice-disjuntos exceto pelos extremos.

Exercício 3.8.

a) Estude o Teorema de Mader sobre H -caminhos (veja Seção 3.4 do livro do Diestel [Die05]).

Teorema 3.17 Dado um grafo $G = (V, E)$ e um subgrafo induzido H de G . O maior número de H -caminhos internamente vértice-disjuntos é o menor valor $M_G(H)$ de

$$|X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \left\lfloor \frac{1}{2} |\partial(C)| \right\rfloor,$$

onde $X \subseteq V \setminus V(H)$ e $F \subseteq E(G - V(H) - X)$ são tomados de forma que todo H -caminho contém pelo menos um vértice de X ou uma aresta de F e onde \mathcal{C}_F é o conjunto de componentes conexas do grafo $(V \setminus (V(H) \cup X), F)$ e $\partial(C)$ é o conjunto de vértices de C com vizinhos em $G - X - V(C)$.

b) Prove o Teorema de Tutte (que caracteriza grafos com emparelhamentos perfeitos) usando o Teorema de Mader. *Sugestão:* Veja o Exercício 19 do Capítulo 3 do livro do Diestel [Die05].

Exercício 3.9. Exiba um grafo tal que quaisquer 3 de seus vértices pertençam a um mesmo circuito, e que tenha 4 vértices que não pertencem a um mesmo circuito.

NOTAS DO CAPÍTULO 3

3.6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.