Um curso de Grafos

Versão: 13 de agosto de 2015, às 16 08
Maio 2013

Notas de aula de Teoria dos Grafos

Yoshiko Wakabayashi alunos tomadores de notas

segundo semestre de 2012

compilado 13 de agosto de 2015

Notas de aula escritas conjuntamente pelos alunos da turma de 2012 da disciplina (Teoria dos Grafos, MAC 5771). Eventuais erros, confusões e gafes são de nossa autoria.

O curso não segue um livro propriamente dito, mas algumas referências são feitas no decorrer das notas.

Muitas pessoas garantiram que este projeto pudesse ser levado tão longe. Destacamos o trabalho e dedicação de Yoshiko Wakabayashi, Eric Ossami Endo, Fábio Happ Botler, Leonardo Nagami Coregliano, Rafael Santos Coelho, e Tássio Naia dos Santos. Obrigado!

Este é um trabalho em progresso. Quaisquer inconsistências, incorreções, sugestões, fique à vontade para nos contactar. Este projeto é mantido em https://gitorious.org/notas-grafoes-2012-ii.

1 INTRODUÇÃO E NOTAÇÃO

Este texto foi construído a partir de notas de aula[1]. Ele foi concebido tendo em mente alunos de pós-graduação e alunos de graduação interessados na teoria dos grafos. Por uma questão de brevidade, resultados mais simples da teoria são mencionados, mas não demonstrados.

Entendemos que os conceitos e construções empregados na demonstração de teoremas são tão importantes e valiosos quanto os resultados que sustentam. Assim, exibimos mais de uma demonstração para vários dos resultados enunciados. Um certo número de exercícios é parte central do texto, uma das mais divertidas!

A teoria dos grafos é uma área rica em resultados e bastante desenvolvida da matemática. Mesmo uma seleção bastante rigorosa de tópicos contém material para anos de estudo. Um esforço foi feito no sentido de colher algumas referências úteis para o leitor interessado em explorar temas mencionados aqui, mas é preciso dizer que as referências estão longe de serem exaustivas.

A maior parte da notação usada é padrão na literatura sobre grafos. Referimos o leitor a [Die05, Bol98] para exemplos.

1.1 GRAFOS

Dado um conjunto V, possivelmente infinito, e um conjunto E de pares de elementos de V, dizemos que o par ordenado $G = (V, E)$ é um **grafo**. Neste caso, dizemos que V é o conjunto de **vértices** de G e E é o conjunto de **arestas** de G. Para evitar sobrecarga de notação, muitas vezes substituímos $\{u, v\} \in E$ por $uv \in E$. Se $v \in V$ e $e \in E$ são tais que $v \in e$, dizemos que v **incide** em e e que e incide em v. Se $u, v \in V$ e $\{u, v\} \in E$, dizemos que u é **adjacente** a v, ou que u é **vizinho** de v. Dado $v \in V$, denotamos por $N(v)$ o conjunto de vértices de G que são adjacentes a v. Dizemos que $N(v)$ é a **vizinhança** de v e que $d(v) = |N(v)|$ é o **grau** de v. Para evitar ambiguidade, indicamos por $N_G(v)$ a vizinhança de v no grafo G. Para $X \subseteq V$, denotamos por $N(X)$ ou $\mathrm{Adj}(X)$ o conjunto $\bigcup_{x \in X} N(x)$.

Denotamos por $V(G)$ e por $E(G)$ o conjunto de vértices e de arestas de G, respectivamente.

Exemplo 1.1 Seja $V = \{0, 1, \ldots, n\}$ e $E = \{0i : i = 1, 2, \ldots, n\}$. O grafo $G = (V, E)$ é chamado de **estrela**. (Veja a figura 1.1.)

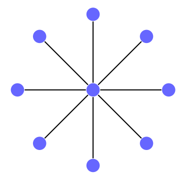


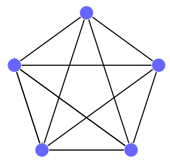
Figura 1.1: Estrela com 9 vértices.

Exemplo 1.2 Seja $G = (V, E)$ um grafo tal que para todo par de vértices distintos $u, v \in V$ temos que $uv \in E$. Dizemos que G é um grafo **completo**. Denotamos o grafo completo com n vértices por K_n. (Veja a figura 1.2a.)

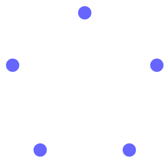
Exemplo 1.3 Se G é um grafo tal que $E(G) = \varnothing$, dizemos que G é um grafo **vazio**. (Veja a figura 1.2b.)

Exemplo 1.4 Seja $G = (V, E)$ é um grafo e defina $\overline{E} = \{uv : u, v \in V\} \setminus E$. O grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$ é dito o grafo **complementar** de G. (Veja figuras 1.3a e 1.3b.)

[1] Prof. Dra. Yoshiko Wakabayashi, Teoria dos Grafos, agosto–novembro de 2013, Instituto de Matemática e Estatística da Universisdade de São Paulo.

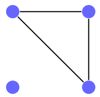


(a) K_5, grafo completo com 5 vértices.

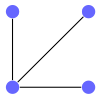


(b) Grafo vazio com 5 vértices.

Figura 1.2: Exemplos de grafos especiais.



(a) Um grafo arbitrário G.



(b) $\overline{G}$, o complemento de G.

Figura 1.3: Exemplo de um grafo e seu complemento.

Exemplo 1.5 Se G é um grafo tal que $d(u) = d(v) = r$ para todo $u, v \in V(G)$, dizemos que G é um grafo **regular**, r**-regular**, ou regular **de grau** r. (Veja a figura 1.4.)

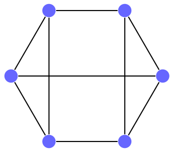


Figura 1.4: Grafo 3-regular.

Exemplo 1.6 Seja G um grafo tal que $V(G) = A \cup B$, onde $A \cap B = \varnothing$, e tal que toda aresta de G tem um vértice em A e um vértice em B. Dizemos que G é um grafo **bipartido** ou (A, B)**-bipartido**. (Veja a figura 1.5.) Um grafo (A, B)-bipartido é dito bipartido **completo** se seu conjunto de arestas é $E = \{\{a, b\} : a \in A, b \in B\}$. Se $|A| = m$ e $|B| = n$, denotamos o grafo (A, B)-bipartido completo por $K_{m,n}$.

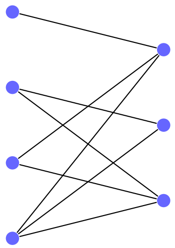


Figura 1.5: Grafo bipartido.

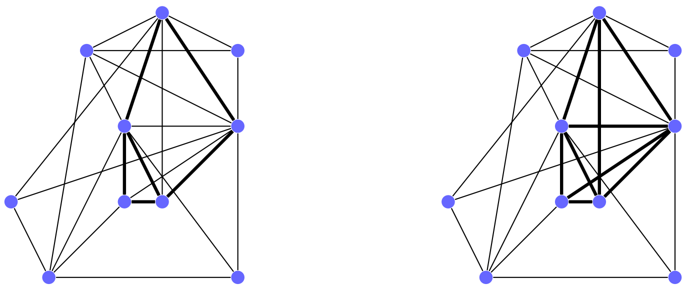
Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dizemos que um grafo $H = (V', E')$ é um **subgrafo** de G, denotado por $H \subseteq G$, se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Dado um subconjunto V' de vértices de G o subgrafo de G **induzido** por V', denotado por $G[V']$, é o subgrafo de G no conjunto de vértices V' que contém todas as arestas que tem dois vértices em V'. Em outras palavras, $G[V']$ é o subgrafo de G no conjunto de vértices V' com o maior número de arestas.

Dado um subconjunto E' de arestas de G, o subgrafo de G induzido por E', denotado por $G[E']$, é o subgrafo de G formado pelas arestas em E' e vértices incidentes a arestas em E'. Ou seja, $V(G[E']) = \bigcup_{e \in E'} e$. (Veja figuras 1.6a e 1.6b.)

Um **isomorfismo** entre dois grafos G e H é uma função $f : V(G) \to V(H)$ bijetora tal que $vw \in E(G) \quad \Leftrightarrow \quad f(v)f(w) \in E(H)$. Nesse caso, também dizemos que G e H são **isomorfos**.

Passeios, Trilhas, circuitos e caminhos

Dado um grafo $G = (V, E)$, um **passeio** é uma sequência $P = v_0 v_1 \cdots v_k$ de vértices de G tal que $v_i v_{i+1} \in E$ para $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Dizemos



(a) Exemplo: subgrafo. (b) Exemplo: subgrafo induzido.

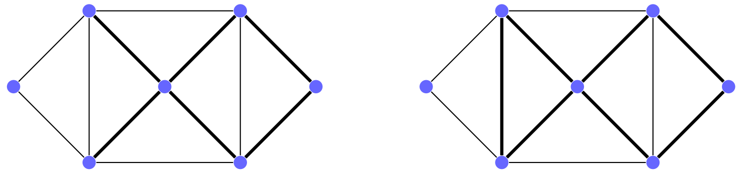
Figura 1.6: Exemplos de subgrafo e subgrafo induzido.

que P é **fechado** se $v_0 = v_k$, caso contrário dizemos que P é **aberto**. Se $v_i \neq v_j$ para todo $i, j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ com $i \neq j$, dizemos que P é **simples** (ou **vértice-simples**). Se $1 \leq i \leq k-1$, dizemos que v_i é um vértice **interior** de P, caso contrário, v_i é dito vértice **extremo** de P. Se P é simples e fechado, dizemos que P é um **circuito**, e, se P é simples e aberto, dizemos que P é um **caminho**. Dizemos que o **comprimento** de P é k e o denotamos por $|P|$. (Veja figuras 1.7a, 1.7b, 1.7c e 1.7d.)

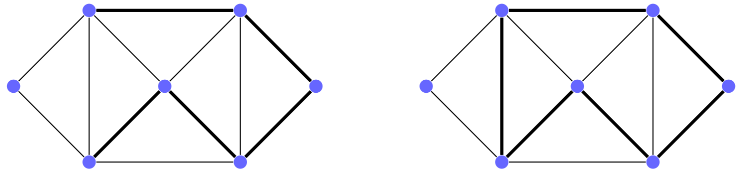
Se $\{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_j, v_{j+1}\}$ para todo $i \neq j$ com $i, j \in \{1, \ldots, k-1\}$, dizemos que P é **aresta-simples**. Um passeio aresta-simples é também chamado de **trilha**. Dada uma trilha $T = v_0 v_1 \cdots v_k$, podemos nos referir a T como o subgrafo dado por $V(T) = \{v_i : i = 0, \ldots, k\}$ e $E(T) = \{v_i v_{i+1} : i = 0, \ldots, k-1\}$. Um grafo é dito **euleriano** se contém uma trilha que contém todas as suas arestas.

Dado um passeio P, uma seção de P é qualquer subsequência de P.

Dados dois passeios $P = v_0 v_1 \cdots v_n$ e $Q = w_0 w_1 \cdots w_m$ tais que $v_n = w_0$, a concatenação de P e Q (denotada por PQ) é $v_0 v_1 \cdots v_n w_1 w_2 \cdots w_m$.



(a) Exemplo: Trilha aberta. (b) Exemplo: Trilha fechada.



(c) Exemplo: Trilha simples e aberta, ou caminho. (d) Exemplo: Trilha simples e fechada, ou circuito.

Figura 1.7: Exemplos de passeios especiais.

Dizemos que dois caminhos P e Q são internamente disjuntos nos vértices se não existe v vértice interno de ambos os caminhos P e Q. Dizemos ainda que P e Q são disjuntos nas arestas se $E(P) \cap E(Q) = \varnothing$.

Grafos conexos

Um grafo G é dito **conexo** se para todo par de vértices $u, v \in V(G)$ existe caminho contendo u e v, caso contrário dizemos que G é **desconexo**. Um subgrafo conexo H de G é dito uma **componente conexa** de G se não existe $H' \subseteq G$ conexo tal que $H \subseteq H'$ e $H \neq H'$. Se v é um vértice de G tal que $d(v) = 0$, dizemos que v é um **vértice isolado** de G. Neste caso, o subgrafo de G contendo apenas o vértice v é uma componente conexa de G. O **grafo trivial** é o único (a menos de isomorfismo) grafo de ordem 1.

Dados dois vértices u, v de G, seja P_{uv} um caminho de menor comprimento contendo u e v. Dizemos que a **distância** de u para v (ou entre u e v), denotada por $d(u,v)$, é o comprimento de P_{uv}.

Uma propriedade P sobre a classe dos pares ordenados que representam grafos é dita uma **propriedade de grafos** se é invariante sob isomorfismo de grafos, isto é, se $P(G)$ e G isomorfo a H implicam $P(H)$ para todos grafos G e H.

Seja B alguma propriedade sobre grafos. Por vezes dizemos que um grafo G é **hipo-**B se G não possui a propriedade B, mas $G - v$ possui a propriedade B, para todo vértice v de G.

1.2 DIGRAFOS

Definimos o conceito de grafo **orientado** (ou **dirigido**) da seguinte forma. Seja V um conjunto de vértices e considere um conjunto A de pares *ordenados* de elementos de V. O par ordenado $D = (V, A)$ é dito um **digrafo**. Os elementos de A são ditos **arcos** de D. Novamente, para evitar sobrecarga na notação, substituiremos $(u,v) \in A$ por $uv \in A$. Observe que neste caso $uv \neq vu$. Dado um arco $a = (u,v) \in A$, dizemos que a **sai** de u e **aponta** para v. O **grau de entrada** de v, denotados por $d^-(v)$ é o número de arcos em A que apontam para v. O **grau de saída** de v, denotado por $d^+(v)$, é o número de arcos em A que saem de v.

Um **passeio orientado** em D é uma sequência $P = v_0v_1 \cdots v_k$ de vértices de D tal que $v_iv_{i+1} \in A$ para todo $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Trilhas orientadas, caminhos orientados e circuitos orientados e termos relacionados são definidos analogamente ao caso anterior.

O **grafo subjacente** de um digrafo D é o grafo G tal que $V(G) = V(D)$ e há uma aresta em G entre os vértices v e w se e só se há um arco de v para w ou um de w para v.

Um digrafo é dito **fracamente conexo** se seu grafo subjacente for conexo e ele é dito **fortemente conexo** se, para todos vértices v e w, existe um passeio orientado de v para w (note que também haverá um de w para v trocando a escolha do par).

As noções de conexidade de digrafos são definidas analogamente, mas sempre enfatizando o tipo de conexidade exigida (fraco ou forte).

Vale lembrar o seguinte teorema sobre digrafos eulerianos.

Teorema 1.7 Seja D um digrafo fortemente conexo. Então D é euleriano se e somente $\forall v \in V(D), d^+(v) = d^-(v)$.

1.3 OPERAÇÕES

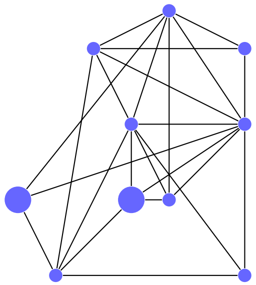
Dados dois grafos G, H no mesmo conjunto de vértices V, definimos a **união** e a **interseção** de G e H, respectivamente por $G \cup H = (V, E(G) \cup E(H))$ e $G \cap H = (V, E(G) \cap E(H))$.

Para um grafo G e um conjunto S de vértices de G denotamos por $G \setminus S$ (ou simplesmente $G - S$) o grafo obtido de G pela **remoção** dos vértices em S e das arestas de G incidentes a algum vértice de S. No caso em que S contém apenas um elemento v, escrevemos apenas $G - v$. Para um conjunto E' de arestas de G o grafo $G \setminus E'$ (ou $G - E'$) é o grafo obtido de G pela remoção das arestas em E'. (Veja figuras 1.8a e 1.8b.)

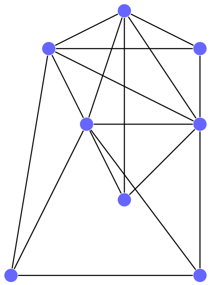
Dados dois grafos G e H no mesmo conjunto de vértices, a **diferença simétrica** de G e H, denotada por $G \triangle H$, é dada por $(G \cup H) - E(G \cap H)$.

1.4 MULTIGRAFOS

Um **multigrafo** é um par ordenado (V, E) onde V é um conjunto (chamado conjunto de vértices) e E é um multiconjunto (um conjunto com elementos possivelmente repetidos) tal que todo elemento de E é da forma $\{v, w\} \subseteq V$ e não temos necessariamente $v \neq w$.



(a) Exemplo: Grafo G.



(b) Exemplo: Grafo G após a remoção dos dois vértices em destaque.

Figura 1.8: Exemplo de remoção de vértices.

Em outras palavras, um multigrafo é um grafo em que permitimos multiplicidade nas arestas e arestas com as extremidades iguais (estas são chamadas **laços**).

Muitas vezes chamaremos multigrafos apenas de grafos por abuso e quando quisermos enfatizar que um grafo não é um multigrafo, diremos que é um **grafo simples**.

1.5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Bol98] B. Bollobás. *Modern graph theory*. Graduate Texts in Mathematics Series. Springer-Verlag GmbH, 1998.

[Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.

2 EMPARELHAMENTOS

Um conjunto de arestas M de um grafo G é chamado de **emparelhamento** se para cada vértice $v \in V(G)$ existe no máximo uma aresta de M incidente a v. A teoria de emparelhamentos em grafos é uma área bastante estabelecida, com resultados em várias direções [PL86, CCPS11] e generalizações[1]. Nestas notas apresentamos alguns resultados clássicos com o objetivo de compreender a decomposição de Edmonds–Gallai e o algoritmo de Edmonds para obter emparelhamentos máximos em grafos quaisquer.

Dado um emparelhamento M e um vértice v, dizemos que M **cobre** (ou **satura**) v se alguma aresta de M incide em v. Se nenhuma aresta de M incide em v, ou seja, v não é coberto por M, também dizemos que v é um vértice **exposto** por M(ou **livre** (de M). Dizemos que um emparelhamento M sobre G é **maximal** se não existe emparelhamento $M' \supset M$ que contém M propriamente. Um emparelhamento é dito **máximo** se sua cardinalidade é máxima.

Em geral, estamos interessados em determinar condições para a existência de emparelhamentos que cobrem todos os vértices do grafo. Tais emparelhamentos são ditos **perfeitos**. Apresentamos ainda fórmulas explícitas para o cálculo da cardinalidade $\mathrm{Emp}(G)$ de um emparelhamento máximo de G, e um algoritmo para obter um emparelhamento de cardinalidade máxima.

Dado um emparelhamento M de um grafo G, um **caminho M-alternante** em G é um caminho cujas arestas estão alternadamente em M e e em $E(G) \setminus M$. Um tal caminho com extremos livres (de M) é chamado **caminho aumentador**, nome que deriva do Teorema de Berge, enunciado a seguir.

Teorema 2.1 (Berge, 1957). Seja G um grafo e M um emparelhamento em G. Então M é um emparelhamento máximo se e só se G não tem nenhum caminho M-alternante com ambos os extremos livres.

2.1 EMPARELHAMENTOS PERFEITOS

Teorema 2.2 (Hall, 1935). Seja G um grafo (A, B)-bipartido. Então G tem um emparelhamento que cobre A se e somente se $|\mathrm{Adj}(X)| \geq |X|$ para todo $X \subseteq A$.

Demonstração. Demonstramos apenas uma das implicações. Suponha que não exista um emparelhamento que cobre A, e considere um emparelhamento máximo M de G. Então existe vértice $v \in A$ que não é coberto por M. Considere $A' \cup B'$ ($A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$) o conjunto dos vértices de G que são atingíveis a partir de v por caminhos M-alternantes. Como G é bipartido, todo caminho de v até $a \in A'$ tem comprimento par. Logo, todo vértice $a \neq v$ é emparelhado com o vértice que vem exatamente antes dele em todos esses caminhos que o atingiram. Assim, todo vizinho de a está em B' e, portanto, $\mathrm{Adj}(A') = B'$. Por hipótese temos $|\mathrm{Adj}(A')| \geq |A'|$. Portanto, $|B'| \geq |A'|$ e, assim, como $v \in A'$ não está coberto por M, existe pelo menos um vértice b em B' que não está coberto por M. O caminho M-alternante de v a b tem comprimento ímpar e, portanto, é aumentador. Pelo Teorema 2.1, M não é um emparelhamento máximo, uma contradição. □

Corolário 2.3 Seja G um grafo (A, B)-bipartido. Se $|\mathrm{Adj}(X)| \geq |X| - k$ para todo $X \subseteq A$ e algum inteiro fixo k, então G possui um emparelhamento de cardinalidade $|A| - k$.

Demonstração. Segue facilmente, adicionando-se k vértices a B, conectados cada um a todos vértices de A, e aplicando-se o Teorema de Hall (Teorema 2.2) ao grafo que resulta. □

Um conjunto S de vértices de um grafo G é dito uma **cobertura** (por vértices) se toda aresta de G é incidente a pelo menos um vértice de S. O tamanho de uma cobertura de menor cardinalidade de G é denotado por $\operatorname{Cob}(G)$. É fácil ver que $|S| \geq |M|$, para qualquer cobertura S e qualquer emparelhamento M de um grafo. Portanto, $\operatorname{Cob}(G) \geq \operatorname{Emp}(G)$. O seguinte teorema estabelece a célebre relação min–max entre coberturas e emparelhamentos [Die05, BM08] em grafos bipartidos.

Teorema 2.4 (Kőnig, 1931). Seja G um grafo bipartido. A cardinalidade de um emparelhamento máximo de G é igual à cardinalidade de uma cobertura mínima de G.

Demonstração. Demonstramos que $\operatorname{Emp}(G) \geq \operatorname{Cob}(G)$. A outra desigualdade é um exercício. Seja G um grafo (A, B)-bipartido e C uma cobertura mínima de G. Definimos os conjuntos

$$A_C = A \cap C, \quad B_C = B \cap C, \quad A_{\overline{C}} = A \setminus C, \quad \text{e} \quad B_{\overline{C}} = B \setminus C.$$

Seja H o subgrafo de G induzido por $A_C \cup B_{\overline{C}}$. É claro que H é $(A_C, B_{\overline{C}})$-bipartido. Mostramos a sequir que a minimalidade de C garante que H satisfaz a hipótese do Teorema de Hall.

Seja X um subconjunto qualquer de A_C. O conjunto $(C \setminus X) \cup \operatorname{Adj}_H(X)$ é uma cobertura de G, pois toda aresta que tem uma ponta em X também tem uma ponta em $\operatorname{Adj}_H(X)$. Como a cardinalidade dessa cobertura é $|C| - |X| + |\operatorname{Adj}_H(X)|$, a minimalidade de C garante que $|\operatorname{Adj}_H(X)| \geq |X|$.

Pelo Teorema de Hall, existe um emparelhamento F em H que cobre A_C. De maneira análoga, podemos concluir que o subgrafo H' de G induzido por $B_C \cup A_{\overline{C}}$ possui um emparelhamento F' que cobre B_C. Ademais, $F \cup F'$ é um emparelhamento em G e

$$\operatorname{Emp}(G) \geq |F \cup F'| = |F| + |F'| = |A_C| + |B_C| = |C|. \qquad \square$$

Vale notar que a relação min–max mencionada no teorema anterior não vale para quaisquer grafos. De fato, temos que $\operatorname{Emp}(K_3) = 1$ e $\operatorname{Cob}(K_3) = 2$.

Exercício 2.1. Demonstre o Teorema de Hall de duas formas:

i) dividindo nos seguintes dois casos. Caso (1): existe conjunto de vértices S com $|\operatorname{Adj}(S)| = |S|$, e Caso (2): para todo $S \in V(G)$ vale $|\operatorname{Adj}(S)| > |S|$; e
ii) usando o Teorema de Kőnig.

Dado um grafo H, denotamos por $c_o(H)$ o número de componentes conexas de H que têm um número ímpar de vértices. O teorema a seguir fornece uma condição para a existência de emparelhamentos perfeitos em grafos arbitrários em termos desse parâmetro.

Teorema 2.5 (Tutte, 1947). Um grafo $G = (V, E)$ tem um emparelhamento perfeito se e só se $c_o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V$.

Exercício 2.2. Deduza o Teorema de Hall do Teorema de Tutte (Teorema 2.5).

Exercício 2.3. Um **grafo cúbico** é um grafo 3-regular. Prove que todo grafo cúbico sem arestas-de-corte tem um emparelhamento perfeito (Petersen, 1891). *Sugestão:* mostre que tal grafo satisfaz a condição do Teorema de Tutte (Teorema 2.5).

2.2 EMPARELHAMENTOS MÁXIMOS E A DEFICIÊNCIA DE UM GRAFO

Dado um grafo (A, B)-bipartido G e um conjunto $X \subseteq A$, a **deficiência de** X (com relação a A), denotada por $\operatorname{def}_A(X)$, é definida como

$$\operatorname{def}_A(X) := |X| - |\operatorname{Adj}(X)|.$$

Para um grafo (A, B)-bipartido G, definimos a **A-deficiência de** G, denotada por $\operatorname{Def}_A(G)$, como

$$\operatorname{Def}_A(G) := \max_{X \subseteq A} \operatorname{def}_A(X).$$

Note que a A-deficiência de G é não-negativa, uma vez que, para $X = \emptyset$, temos $\operatorname{def}_A(X) = 0$.

Em 1955, Ore [Ore55] publicou uma "versão defectiva" do *Teorema de Hall* para grafos bipartidos. Em 1958, Berge obteve uma versão generalizada para grafos arbitrários, tendo como base o Teorema de Tutte.

Teorema 2.6 (Ore, 1955). Se G é um grafo (A, B)-bipartido, então

$$\operatorname{Emp}(G) = |A| - \operatorname{Def}_A(G).$$

Demonstração. A desigualdade $\operatorname{Emp}(G) \leq |A| - \operatorname{Def}_A(G)$ segue diretamente da definição de $\operatorname{Def}_A(G)$; a desigualdade $\operatorname{Emp}(G) \geq |A| - \operatorname{Def}_A(G)$ segue do Corolário 2.3. $\square$

Definindo-se a a deficiência de um grafo (A, B)-bipartido G como

$$\operatorname{Def}(G) = \operatorname{Def}_A(G) + \operatorname{Def}_B(G),$$

segue do Teorema 2.6 que a deficiência de um grafo bipartido G é o número de vértices livres de um emparelhamento máximo, isto é, $\operatorname{Def}(G) = |V| - 2\operatorname{Emp}(G)$. Esta última igualdade motiva a definição de deficiência para grafos arbitrários.

2.3 Defeito em grafos arbitrários

Seja M um emparelhamento em G. Definimos o **defeito de** M como sendo o número de vértices livres de M. Definimos a **Deficiência de** G como sendo o número de vértices livres de um emparelhamento máximo de G, isto é,

$$\begin{aligned} \operatorname{Def}(G) &= |V| - 2\operatorname{Emp}(G), \\ &= \min_{M \in \mathcal{M}} \{|V| - 2|M|\}, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{M}$ é o conjunto dos emparelhamentos de G. Em 1958, Berge provou o teorema a seguir, conhecido como **Fórmula de Berge**.

Teorema 2.7 (Fórmula de Berge). Para todo grafo $G = (V, E)$, temos que

$$\operatorname{Def}(G) = \max_{S \subseteq V} \{c_o(G - S) - |S|\}. \tag{2.1}$$

O Teorema 2.7 é consequência do teorema a seguir, que quantifica o tamanho de um emparelhamento máximo num grafo arbitrário.

Teorema 2.8 (Fórmula de Tutte-Berge). Para todo grafo $G = (V, E)$, temos que

$$\operatorname{Emp}(G) = \min_{S \subseteq V} \left\{ \frac{|V| + |S| - c_o(G - S)}{2} \right\}. \tag{2.2}$$

Demonstração. É suficiente provarmos para o caso em que G é conexo. Primeiramente, demonstramos que $\operatorname{Emp}(G) \leq \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V} \{|V| + |S| - c_o(G - S)\}$. Observe que se existe $S \subseteq V$ tal que $c_o(G - S) > |S|$, então pelo menos $c_o(G - S) - |S|$ vértices devem ficar expostos em qualquer emparelhamento de G. Assim, temos no máximo $\frac{1}{2}(|V| - c_o(G - S) + |S|)$ arestas em um emparelhamento, donde segue que $\operatorname{Emp}(G) \leq \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V} \{|V| + |S| - c_o(G - S)\}$.

A demonstração de $\operatorname{Emp}(G) \geq \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V} \{|V| + |S| - c_o(G - S)\}$ segue por indução no número de vértices. Se $|V| = 1$ a fórmula é óbvia, e ambos os lados resultam 0. Suponha então que $|V| > 1$ e que o teorema vale para todo grafo G' com $|V(G')| < |V|$. Consideramos dois casos.

Caso 1. Existe um vértice v que é coberto por todo emparelhamento máximo de G. Seja M um tal emparelhamento. Considere o grafo $G' = (V', E')$ obtido de G pela remoção do vértice vSeja e a aresta de M que cobre v e tome o emparelhamento $M' = M - e$ de G'. Se existe emparelhamento de G' de tamanho $|M'| + 1 = |M| = \operatorname{Emp}(G)$, então existe emparelhamento máximo em G que não cobre v. Logo, $\operatorname{Emp}(G') =$

$\mathrm{Emp}(G) - 1$. Pela hipótese de indução, existe $S' \subseteq V'$ tal que $|V'| + |S'| - c_o(G' - S') = 2|M'|$. Considere o conjunto $S = S' \cup \{v\} \subseteq V$ e observe que, uma vez que $G' = G - v$, temos $G' - S' = G - v - S' = G - S$. Logo, temos $c_o(G' - S') = c_o(G - S)$ e, portanto,

$$
\begin{aligned}
|M| \quad = \quad |M'| + 1 \quad &= \frac{|V'| + |S'| - c_o(G' - S')}{2} + 1 \\
&= \frac{(|V'| + 1) + (|S'| + 1) - c_o(G' - S')}{2} \\
&= \frac{|V| + |S| - c_o(G - S)}{2} \\
&\geq \min_{S \subseteq V} \left\{ \frac{|V| + |S| - c_o(G - S)}{2} \right\}.
\end{aligned}
$$

Caso 2. Todo vértice de G é exposto por algum emparelhamento máximo. Vamos provar que *exatamente* um vértice é exposto por qualquer emparelhamento máximo.

Suponha que para todo emparelhamento máximo, existam dois vértices expostos. Tome então um emparelhamento máximo M tal que a distância $\mathrm{d}(u, v)$ entre dois vértices expostos u e v seja mínima. A distância entre u e v não pode ser 1, caso contrário podemos adicionar a aresta uv a M e obter um emparelhamento maior. Além disso, todo vértice interior num caminho de menor comprimento entre u e v deve ser coberto por M, caso contrário existiria um par de vértices não cobertos com distância menor que $\mathrm{d}(u, v)$. Tome s um tal vértice e tome N um emparelhamento máximo de G que não cobre s e tal que $M \cap N$ seja o maior possível. Note, em particular, que u e v são cobertos por N (e são expostos por M). Ora, como a cardinalidade de M e N é a mesma, existe um vértice $x \neq s$ que é coberto por M, mas é exposto por N.

Seja $y \in V(G)$ o vértice emparelhado com x em M. Se y não for coberto por N podemos adicionar a aresta xy a N, entrando em contradição com a maximalidade de N. Se y for coberto por N, podemos retirar de N a aresta que o cobre e adicionar xy em seu lugar, obtendo um emparelhamento N' com uma interseção maior com M, uma contradição. Concluímos que todo emparelhamento máximo deixa exposto exatamente um vértice. Portanto, $\mathrm{Emp}(G) = (|V| - 1)/2$. A fórmula de Tutte-Berge segue tomando-se $S = \emptyset$.

□

No caso 2 da demonstração do Teorema 2.8, encontramos um grafo G tal que $G - v$ possui um emparelhamento perfeito para todo $v \in V(G)$. Neste caso, dizemos que G é **hipoemparelhável**. Mais geralmente, se $\mathcal{B}$ é uma propriedade sobre grafos, dizemos que um grafo G é **hipo-$\mathcal{B}$** se $G \notin \mathcal{B}$, e $G - v \in \mathcal{B}$ para todo vértice v de G.

Na busca de um emparelhamento com cardinalidade máxima, nos deparamos com a questão de saber, dado um emparelhamento M, se é possível encontrar um emparelhamento maior. O Teorema 2.7 nos dá uma ideia de como proceder. Note que, para todo conjunto S, a fórmula fornece um limitante inferior para o número de vértices expostos por um emparelhamento máximo. Sabemos que não é possível encontrar emparelhamento que deixa menos do que $c_o(G - S) - |S|$ vértices expostos. Portanto, se M deixa exatamente $c_o(G - S) - |S|$ vértices expostos, para algum S, então M é máximo.

Estruturas como o conjunto S, que definem condições necessárias para alguma propriedade, são chamados de **certificados**. O conjunto S, por exemplo, é um certificado de que *ao menos* certa quantidade de vértices é deixada livre por um emparelhamento em G.

Outro conceito que será útil adiante é o de *testemunha*. Dado um emparelhamento máximo M em um grafo $G = (V, E)$, o Teorema 2.8 garante a existência de um conjunto $S \subseteq V$ tal que $|M| = \frac{1}{2}(|V| + |S| - c_o(G - S))$. Um tal conjunto S é dito **testemunha** de G.

Teorema 2.9 (Decomposição de Edmonds–Gallai). Dado um grafo $G = (V, E)$, sejam

$$D_G = \{v \in V : \text{existe emparelhamento máx. em } G \text{ que não cobre } v\},$$
$$A_G = \{v \in V \setminus D_G : v \text{ é adjacente a algum vértice de } D_G\},$$
$$C_G = V \setminus (D_G \cup A_G).$$

Então
a) $S = A_G$ é testemunha de G;
b) C_G é a união de componentes pares de $G - A_G$;
c) D_G é a união de componentes ímpares de $G - A_G$;
d) Todo componente ímpar de $G - A_G$ é hipoemparelhável.

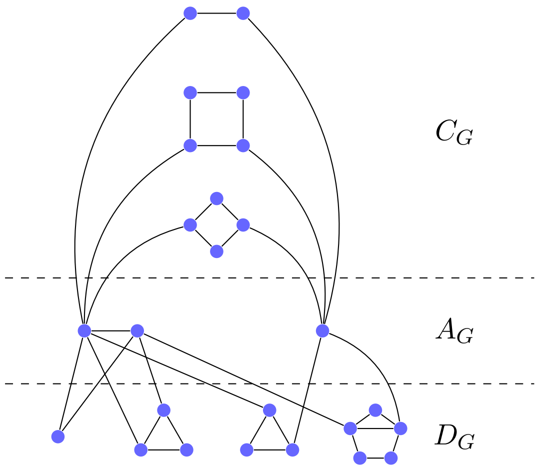


Figura 2.1: Decomposição de Edmonds–Gallai de um grafo. Note que a deficiência é $\mathrm{Def}(G) = \max\{0, c_o(D_G) - |A_G|\}$, e o tamanho do emparelhamento máximo é $\mathrm{Emp}(G) = (|V| + |A_G| - c_o(D_G))/2$.

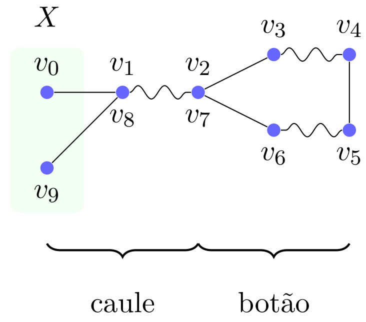


Figura 2.2: Um emparelhamento $M = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}\}$ e uma flor $v_0 v_1 \cdots v_7$.

O Teorema 2.1 sugere que podemos construir um emparelhamento máximo iterativamente. Partimos de um emparelhamento qualquer e enquanto houver um caminho M-aumentador P, substituímos o emparelhamento corrente M por $M \triangle P$. Descrevemos nessa seção algumas estratégias que podem ser usadas para encontrar tal caminho.

Seja $G = (V, E)$ um grafo, M um emparelhamento em G, e X o conjunto de vértices descobertos por M. Um *passeio M-alternante* $v_0, v_1, \ldots, v_t$ é chamado de M-**flor** (figura 2.2) se satisfaz
a) $v_0 \in X$;
b) $v_0, \ldots, v_{t-1}$ são distintos;
c) t é ímpar; e
d) $v_t = v_i$ para algum i ímpar.

Seja $T = v_0 v_1 \cdots v_k$ um passeio M-alternante em G entre vértices distintos de X. Se T é vértice-simples, então T é um caminho M-aumentador. Caso contrário, seja j o menor inteiro tal que $v_i = v_j$, para $i < j$. É fácil ver que $v_0 v_1 \cdots v_j$ é uma M-flor. A parte da M-flor de v_0 a v_i é chamada **caule** ("**stem**") e a parte de v_i a v_t é chamada de **botão** ("**blossom**"). Dizemos que v_0 é a **raiz** da flor ou do botão. Se B é um M-botão, definimos o grafo G/B (chamado G **contraído** de B), com emparelhamento M/B, como o grafo que resulta da substituição do botão por um vértice. Mais formalmente, temos

- $V(G/B) = (V \setminus B) \cup \{b\}$, onde $b \notin V$ é um vértice novo;
- $E(G/B) = (E \setminus \{e \in E : e \text{ incide em } B\}) \cup \{vb : v \in V(G/B), vz \in E(G), z \in B\}$;
- $M/B = (M \setminus \{e \in E : e \text{ incide em } B\}) \cup \{vb : v \in V(G/B), vz \in M, z \in B\}$.

Note que $\{vb : v \in V(G/B), vz \in M, z \in B\}$ possui apenas uma aresta.

O teorema 2.1 diz que se não houver caminho M-aumentador, então M é um emparelhamento máximo, e todo passeio M-alternante entre vértices distintos de X possui uma flor. A utilidade da operação de **contração**, definida acima, fica aparente quando enunciamos o teorema a seguir.

Teorema 2.10 (Edmonds, 1965). Seja $G = (V, E)$ um grafo, M um emparelhamento em G e B um M-botão. Então M é um emparelhamento máximo em G se e somente se M/B é um emparelhamento máximo em G/B.

Demonstração. Vamos provar que existe um caminho M-aumentador em G se e somente se existe um caminho M/B-aumentador em G/B.

Seja F a flor de botão B. Para todo vértice v de B, denote por P_v o caminho de comprimento par em F que vai de v até a raiz de B.

Note que se existe um caminho M-aumentador P em G que não possui aresta de B, então P também é um caminho aumentador em G/B.

Por outro lado, se existe um caminho M-aumentador P em G contendo arestas de B, então existe um caminho M-aumentador com extremo na raiz de B. De fato, tome u um extremo de P diferente da raiz de B e v o primeiro vértice do botão em P quando seguimos P partindo de u. Seja Q o subcaminho de P de u até v. O caminho procurado é dado pela união de Q com P_v.

Observe que a aresta de v em Q não é aresta de M e, portanto, $(Q \cup P)/B$ é um caminho M/B-aumentador em G/B.

Suponha então que existe um caminho M/B-aumentador P em G/B. Se P não contém b então P é um caminho M-aumentador em G. Se P contém b então seja u um extremo de P diferente da raiz de B e $v \in V(G)$ o primeiro vértice do botão em P. Como antes, tome Q o caminho em P de u a v e então $Q \cup P_v$ é um caminho M-aumentador em G. □

(Prova alternativa de uma das implicações.) Suponhamos que M/B não é um emparelhamento máximo em G/B. Seja N um emparelhamento máximo em G/B, temos $|N| > |M/B|$.

Considere o emparelhamento $N^+ = \tilde{N} \cup \tilde{M}$, onde $\tilde{N}$ é um emparelhamento em G que não possui arestas de B e tal que $N/B = \tilde{N}$ e $\tilde{M}$ é um emparelhamento quase-perfeito em B compatível com $\tilde{N}$, isto é, existe exatamente um vértice em B livre de $\tilde{M}$ e N^+ é um emparelhamento em G. Temos

$$|N^+| = |N| + |\tilde{M}| > |M/B| + |\tilde{M}| = |M|.$$

Portanto $|N^+| > |M|$, uma contradição.

□

Observação 2.11 Note que nem todo circuito ímpar hipoemparelhado é um botão. Além disso, se C é um circuito ímpar, e M/C é um emparelhamento máximo em G/C, então *não* necessariamente M emparelhamento máximo em G; onde a contração é definida analogamente.

O teorema 2.10 motiva o seguinte algoritmo para encontrar um emparelhamento máximo partindo de um grafo G com emparelhamento M. Buscamos passeios M-alternantes entre vértices distintos de X. Se não existe tal passeio, o emparelhamento é máximo, pelo teorema 2.1. Se encontramos um tal passeio P *sem* flor, aplicamos o algoritmo a G com emparelhamento $M' = M \triangle P$. Se encontramos um passeio *com* uma flor de botão B, aplicamos o algoritmo a G/B com emparelhamento $M' = M/B$.

O procedimento acima atinge um grafo G com emparelhamento máximo. Uma vez que G pode conter vértices resultantes de contrações, podemos usar o teorema 2.10 para desfazê-las preservando a maximalidade do emparelhamento. Na próxima seção descrevemos o algoritmo que esboçamos.

2.5 ALGORITMO DE EDMONDS–GALLAI

Dado um emparelhamento M em G, desejamos encontrar um emparelhameno maior do que M, ou constatar que M é máximo. No processo, rotulamos os vértices do grafo, de modo a obter a decomposição de Edmonds–Gallai.

Para encontrar o emparelhamento, fazemos uso de caminhos alternantes. A grosso modo, partimos de um emparelhamento M, e construimos uma floresta M-alternante, a partir de algum vértice não coberto (raiz). A árvore “cresce” por meio da adição de arestas do emparelhamento. Nesse processo, rotulamos os vértices da árvore. Quando não pudermos prosseguir, o algoritmo termina, e as classes de vértices definidas pelos rótulos (ou sua ausência) definem as componentes da *decomposição de Edmonds–Gallai* 2.9.

Existem outros algoritmos para encontrar emparelhamentos máximos.[2]

Nosso objetivo é construir uma floresta M-alternante F, e rotulamos seus vértices PAR ou ÍMPAR. Seja X o conjunto de vértices não cobertos por M. Inicialmente rotulamos de PAR os vértices de X. Cada vértice de X é raiz de uma das árvores de F. O crescimento de F é sempre feito a partir de um vértice PAR, digamos u. Temos os seguintes casos.

Caso 1. Existe uma aresta uv onde v não está rotulado. Rotulamos v de ÍMPAR e o seu companheiro w ($vw \in M$) de PAR.

Caso 2. Existe uma aresta uv com v rotulado PAR tal que v pertence a uma árvore distinta da que u pertence. Neste caso, encontramos um caminho M-aumentador $R = P(uv)Q$, onde P é o caminho em F de r_u, raiz da árvore que contém u, até u, e Q é o caminho em F de v até r_v, raiz da árvore que contém v. Fazemos $M = M \triangle R$ e repetimos o processo da construção de F (do início!).

Caso 3. Existe uma aresta uv com v rotulado PAR e v pertencente à mesma árvore à qual pertence u. Neste caso, temos uma uma M-flor em G, com um M-botão, digamos B (circuito ímpar que existe em $F + uv$). Rotulamos de PAR os vértices do botão B, contraímos B e consideramos o grafo G/B com o emparelhamento M/B nesse grafo. Continuamos o processo de expansão da floresta F resultante. (Usamos então o teorema provao na aula passada.) Recursivamente, continuamos…

Fato 2.12 Se nenhum dos três casos ocorre, então afirmamos que encontramos um emparelhamento máximo M' no grafo corrente $G' = (V', E')$ que foi obtido do grafo original após zero ou mais contrações.

Demonstração. Considere a rotulação PAR/ÍMPAR feita conforme a M'-floresta foi construída. Seja $X' = \{x \in V' \colon x \text{ não é coberto por } M'\}$, e sejam

$$\begin{aligned} \text{PAR} &= \{v \in V' : \text{ rótulo de } v \text{ é PAR}\}, \\ \text{ÍMPAR} &= \{v \in V' : \text{ rótulo de } v \text{ é ÍMPAR}\}. \end{aligned}$$

Note que não há flores em G', e portanto $|X'| = |\text{PAR}| - |\text{ÍMPAR}|$. Para para todo subconjunto $S \subseteq V'$ vale $\operatorname{def} G' \geq c_o(G - S) - |S|$ e em particular, tomando $S = \text{ÍMPAR}$, temos que

$$\operatorname{def} G' \geq c_o(G - \text{ÍMPAR}) - |\text{ÍMPAR}| = |\text{PAR}| - |\text{ÍMPAR}| = |X'|.$$

Como M' *não* cobre exatamente $|X|$ vértices, segue que M' é máximo. □

(Prova alternativa.) Sabemos, pela fórmula de Tutte–Berge,

$$\mathrm{Emp}(G') \le \frac{1}{2}(|V'| + |S| - c_o(G' - S))$$

para todo $S \subset V'$. Tomando $S = \text{ÍMPAR}$, temos

$$\mathrm{Emp}(G') \le \frac{1}{2}(|V'| + |\text{ÍMPAR}| - |\text{PAR}|).$$

O algoritmo descrito constroi uma floresta, composta pelo conjunto de vértices rotulados. Como na outra demonstração, considere a rotulação PAR/ÍMPAR feita conforme a M'-floresta foi construída. Seja $X' = \{x \in V' \colon x$ não é coberto por $M'\}$, e sejam

$$\begin{aligned} \text{PAR} &= \{v \in V' : \text{ rótulo de } v \text{ é PAR}\}, \\ \text{ÍMPAR} &= \{v \in V' : \text{ rótulo de } v \text{ é ÍMPAR}\}. \end{aligned}$$

Pela rotulação feita pelo algoritmo, o número de arestas do emparelhamento M' que estão fora da floresta é $(|V'| - (|\text{ÍMPAR}| + |\text{PAR}|))/2$, e o das que estão na floresta é $|\text{ÍMPAR}|$. De fato, o conjunto de vértices $X' \subseteq V'$ expostos por M' está na floresta, e assim os vértices não rotulados (isto é, fora da floresta) devem estar cobertos pelo emparelhamento M'.

A quantidade de vértices fora da floresta é $|V'| - (|\text{ÍMPAR}| + |\text{PAR}|)$, e o número de arestas do emparelhamento M' na floresta é igual ao número de vértices rotulados ÍMPAR, pois cada ÍMPAR é ponta de exatamente uma aresta de M'. Portanto

$$\begin{aligned} |M'| &= \frac{1}{2}(|V'| - (|\text{ÍMPAR}| + |\text{PAR}|)) + |\text{ÍMPAR}| \\ &= \frac{1}{2}(|V'| + |\text{ÍMPAR}| - |\text{PAR}|). \end{aligned}$$

Logo, o emparelhamento M' é máximo. □

Já vimos que o emparelhamento máximo em G' corresponde a um emparelhamento máximo no grafo G inicial, obtido segundo o teorema 2.10 (os botões são descontraídos na ordem inversa de sua contração).

Observamos agora como identificar a decomposição de Edmonds-Gallai do teorema 2.9 partindo da rotulação de G fornecida pelo algoritmo. Lembramos que D_G é o conjunto dos vértices que são descobertos por algum emparelhamento máximo, e A_G é o conjunto de vizinhos de D_G em $V \setminus D_G$. Note que PAR é o conjunto dos vértices v tais que existe em G um caminho M-alternante de comprimento par de X até v. Analogamente, ÍMPAR é o conjunto de vértices $v \in V(G) \setminus \text{PAR}$ alcançáveis por um caminho M-alternante de comprimento ímpar.

Proposição 2.13 Seja M um emparelhamento máximo em $G = (V, E)$, X o conjunto dos vértices não cobertos por M e sejam PAR e ÍMPAR como acima. Então $\text{PAR} = D_G$ e $\text{ÍMPAR} = A_G$.

Consideramos que um caminho de comprimento zero é um caminho M-alternante. Ou seja, PAR contém o conjunto X.

Demonstração. Demonstramos a igualdade $\text{PAR} = D_G$, o fato $\text{ÍMPAR} = A_G$ é um exercício.

(Prova de PAR $\subseteq D_G$.) Seja v um vértice em PAR, e seja P um caminho M-alternante de X para v. Considere $M' = M \triangle P$ (diferença simétrica de Me P). Então M' é um emparelhamento máximo que não cobre v. Portanto, v pertence a D_G.

(Prova de $D_G \subseteq$ PAR.) Seja v um vértice em D_G. Se v pertence a X então v pertence a PAR. Suponha que v é coberto por M. Seja M' um emparelhamento máximo que não cobre v (M' existe pois v pertence a D_G). Os componentes de $M' \triangle M$ são circuitos ou caminhos pares com arestas alternadamente em M' e em M. Como v é coberto por M, existe um caminho alternante par que começa em v, com uma aresta de M, e termina num vértice w, chegando por uma aresta de M'. Como w não é coberto por M, então w pertence a X. Neste caso, temos um caminho

M-alternante par que começa em Xe termina em v. Logo, v pertence a PAR. □

Um corolário que segue imediatamente do Algoritmo de Edmonds–Gallaié o seguinte.

Corolário 2.14 Se M é um emparelhamento máximo em um grafo G, então para todo vértice w em D_G, existe um vértice v descoberto em M e um caminho M-alternante par de v a w.

2.6 EXERCÍCIOS

Exercício 2.4. Seja k um inteiro positivo, e seja G um grafo simples com $|V(G)| \geq 2k$, e tal que $d(v) \geq k$ para todo $v \in G$. Mostre que G tem um emparelhamento com pelo menos k arestas.

Exercício 2.5. Prove que todo grafo bipartido com pelo menos uma aresta tem um emparelhamento que cobre todos os vértices de grau máximo.

Observação 2.15 Note que uma consequência imediata desse resultado é o fato de que o conjunto das arestas e um grafo bipartido pode ser particionado em $\Delta(G)$ emparelhamentos. (Ou seja, o índice cromático de um grafo bipartido é precisamente $\Delta(G)$).

Exercício 2.6. Seja E um emparelhamento maximal e $E^\star$ um emparelhamento máximo num grafo. Mostre que $|E| \geq |E^\star|/2$.

Exercício 2.7. Prove o Teorema de Hall usando o Teorema de Tutte 2.5.

Exercício 2.8. Prove que se $G = (V, E)$ é um grafo com $|V|$ par e tal que

$$|\operatorname{Adj}(X)| \geq \min\left\{|V|, \frac{4}{3}|X| - \frac{2}{3}\right\} \quad \text{para todo } X \subseteq V,$$

então G tem um emparelhamento perfeito.

NOTAS DO CAPÍTULO 2

1. O conceito de emparelhamento pode ser generalizado com o conceito de fatores. Um k**-fator** de G é um subgrafo gerador $H \subseteq G$ em que todo vértice possui grau k. Assim, um emparelhamento perfeito é um 1-fator.

Fatores são comuns no estudo de grafos regulares. Por exemplo, todo grafo bipartido regular (com ao menos uma aresta) possui um 1-fator, e todo grafo euleriano regular possui um 2-fator.

2. No livro do Lovász há um algoritmo, usando orelhas, de complexidade $O(n^3)$. Existe algoritmo $O(\sqrt{n}m)$, de vários autores [], para o caso em que maximiza a cardinalidade do emparelhamento (em oposição a maximizar o *peso* das arestas no emparelhamento, caso em que a complexidade talvez seja outra).

2.7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[BM08] A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2008.

[CCPS11] W.J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank, and A. Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, 2011.

[Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.

[Ore55] Oystein Ore. Graphs and matching theorems. *Duke Math. J.*, 22:625–639, 1955.

[PL86] D. Plummer and L. Lovász. *Matching Theory*. North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science, 1986.