9 MENORES, ÁRVORES E QUASE BOA ORDEM

9.1 RELAÇÕES

Uma relação R sobre um conjunto X é um subconjunto de $A \times A$. Para enfatizar que estamos tratando de relações e não simplesmente de conjuntos, usamos a notação infixa xRy para denotar $(x, y) \in R$.

Fixada uma relação R sobre um conjunto X, dizemos que R é

- **Reflexiva**, se xRx para todo $x \in X$;
- **Transitiva**, se xRy e yRz implicam xRz para todos $x, y, z \in X$;
- **Antissimétrica**, se xRy e yRx implicam $x = y$, para todos $x, y \in X$;
- **Total**, se para todos $x, y \in X$, temos xRy ou yRx;
- **Bem-fundada**, se para todo subconjunto não-vazio Y de X, existe um $y \in Y$ tal que nenhum $z \in Y$ satisfaz zRy e $\neg(yRz)$.

Em particular, uma relação é chamada de

- **Quase-ordem**, se for reflexiva e transitiva;
- **Ordem parcial**, se for reflexiva, transitiva e antissimétrica;
- **Ordem total** (ou **ordem**), se for reflexiva, transitiva, antissimétrica e total;
- **Quase-boa-ordem**, se for reflexiva, transitiva e bem-fundadada;
- **Boa-ordem parcial**, se for reflexiva, transitiva, antissimétrica e bem-fundada;
- **Boa-ordem total** (ou **boa-ordem**), se for reflexiva, transitiva, antissimétrica, total e bem-fundada.

Estamos particularmente interessados em estudar quase-boas-ordens e, nesse contexto, é mais simples trabalhar com uma noção equivalente (sob o axioma da escolha) de relações bem-fundadas:

Proposição 9.1 Assumindo o axioma da escolha, uma relação R sobre um conjunto X é bem-fundada se e somente se para toda sequência infinita enumerável $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, existem indíces $i < j$ tais que $x_i R x_j$.

A partir deste ponto, assumiremos verdadeiro o axioma da escolha implicitamente.

Dada uma relação R sobre um conjunto X, um subconjunto $A \subset X$ é dito uma **anticadeia** se não existem $x, y \in A$ distintos tais que xRy.

Usaremos frequentemente o símbolo $\preceq$ no estudo de relações (tipicamente quase-ordens) e assumiremos sempre que as relações $\prec$, $\succeq$ e $\succ$ estão definidas como:

- Para todos x, y, temos $x \prec y$ se e somente se $x \preceq y$ e $\neg(y \preceq x)$;
- Para todos x, y, temos $x \succeq y$ se e somente se $y \preceq x$;
- Para todos x, y, temos $x \succ y$ se e somente se $x \succeq y$ e $\neg(y \succeq x)$;

Supondo que $\preceq$ é uma quase-ordem, uma sequência $(x_i)_{i\in U}$ indexada por $U \subset \mathbb{N}$ é dita

- **Crescente**, se para todos índices $i < j$, temos $x_i \preceq x_j$;
- **Decrescente**, se para todos índices $i < j$, temos $x_j \succeq x_i$;
- **Estritamente crescente**, se para todos índices $i < j$, temos $x_i \prec x_j$;
- **Estritamente decrescente**, se para todos índices $i < j$, temos $x_j \succ x_i$.

Proposição 9.2 Seja $\preceq$ uma quase-ordem sobre X. Então $\preceq$ é quase-boa-ordem se e somente se X não contém nem uma anticadeia infinita nem uma sequência infinita estritamente decrescente $x_0 \succ x_1 \succ \cdots$.

Demonstração. Observe que se A é uma anticadeia infinita, então qualquer sequência $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em A de elementos distintos é tal que não existem $i < j$ com $x_i \preceq x_j$.

Por outro lado, se $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência infinita estritamente decrescente, então também temos que não existem $i < j$ com $x_i \preceq x_j$.

Portanto, se $\preceq$ é quase-boa-ordem, então X não contém nem uma anticadeia infinita nem uma sequência infinita estritamente decrescente.

Versão: 25 de setembro de 2015, às 18 59

Seja $x_0, x_1, \ldots,$ uma sequência qualquer de X indexada pelos naturais. Considere o grafo completo (infinito) $K_{\mathbb{N}}$

Faça uma coloração das arestas ij de $K_{\mathbb{N}}$, com $i < j$ com 3 cores:

- Atribua a cor *verde*, se $x_i \preceq x_j$;
- Atribua a cor *amarela*, se x_i e x_j são incomparáveis;
- Atribua a cor *vermelha*, se $x_i \succ x_j$.

Pelo teorema de Ramsey, sabemos que $K_{\mathbb{N}}$ tem um subgrafo completo H infinito cujas arestas são todas da mesma cor. Pela hipótese da proposição, tais arestas não podem ser nem amarelas e nem vermelhas.

Portanto, são verdes. Logo, quaisquer dois vértices i, j (com $i < j$) de H são tais que $x_i \preceq x_j$ (bastava uma tal aresta).

Concluímos que $\preceq$ é uma quase-boa-ordem. □

Corolário 9.3 Se $\preceq$ é quase-boa-ordem, então toda sequência infinita em X tem uma subsequência infinita crescente.

Uma quase-ordem $\preceq$ sobre X induz uma quase-ordem natural sobre o conjunto dos subconjuntos finitos de X (denotado por $[X]^{<\omega}$). Essa quase-ordem é definida abaixo.

Para conjuntos finitos $A, B \subseteq X$, fazemos $A \preceq B$ se existe uma função injetora $f\colon A \to B$ tal que $a \preceq f(a)$ para todo $a \in A$.

O seguinte lema e a ideia de sua prova têm um papel importante na teoria da quase-boa-ordem.

Lema 9.4 Se $\preceq$ é quase-boa-ordem sobre X, então $\preceq$ é quase-boa-ordem sobre $[X]^{<\omega}$.

Demonstração. Suponha que $\preceq$ seja uma quase-boa-ordem sobre X e que $\prec$ não seja quase-boa-ordem sobre $[X]^{<\omega}$.

Chamaremos de sequências *ruins* aquelas que violam a propriedade de boa-fundação das relações, isto é, sequências infinitas $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que são ou estritamente decrescentes ou tais que $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ é uma anticadeia. Naturalmente, chamaremos de sequências *boas* aquelas que não são ruins.

Vamos construir uma sequência ruim $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ especial em $[X]^{<\omega}$ recursivamente.

Dado $n \in \mathbb{N}$, suponha, indutivamente, que A_i foi definido para todo natural $i < n$, e que exista uma sequência ruim em $[X]^{<\omega}$ começando com $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ (para $n = 0$, temos que uma sequência ruim existe por $\prec$ não ser quase-boa-ordem sobre $[X]^{<\omega}$)

Escolha então $A_n \in [X]^{<\omega}$ com $|A_n|$ mínimo e de forma que exista uma sequência ruim em $[X]^{<\omega}$ começando com $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

Claramente temos $A_n \neq \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (caso contrário teríamos $A_n \preceq A_{n+1}$. Escolha então, para cada $n \in \mathbb{N}$, um elemento $a_n \in A_n$ e tome $B_n = A_n \setminus \{a_n\}|$.

Pelo Corolário 9.3, a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência infinita crescente $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$.

Considere a sequência de conjuntos

$$(C_i)_{i\in\mathbb{N}} = (A_0, A_1, \ldots A_{n_0-1}, B_{n_0}, B_{n_1}, \ldots)$$

Note que esta sequência é boa por construção (se a sequência fosse ruim, teríamos $|B_{n_0}| < |A_{n_0}|$, contradizendo a escolha de A_{n_0}).

Portanto, existe um par de índices $i_0 < j_0$ tal que $C_{i_0} \preceq C_{j_0}$.

Observe que não podemos ter $j_0 < n_0$, caso contrário, teríamos $A_{i_0} \preceq A_{j_0}$.

Também não podemos ter $i_0 < n_0 \leq j_0$, caso contrário, teríamos $A_{i_0} \preceq B_{j_0} \preceq A_{j_0}$.

Finalmente, se tivermos $n_0 \leq i_0$, então, como $a_{i_0} \preceq a_{j_0}$, temos que $B_{i_0} \preceq B_{j_0}$ implica $A_{i_0} \preceq A_{j_0}$ (basta estender a função de B_{i_0} para B_{j_0} fazendo a imagem de a_{i_0} ser a_{j_0}). Isso é uma contradição.

Portanto $\preceq$ é quase-boa-ordem sobre $[X]^{<\omega}$. □

Versão: 25 de setembro de 2015, às 18 59

Seja $\mathcal{G}$ a classe de todos os grafos *finitos* a menos de isomorfismo e $\preceq$ a relação de 'menor (de)' definida sobre $\mathcal{G}$. É fácil ver que $\preceq$ é quase-ordem sobre $\mathcal{G}$ (é inclusive uma ordem parcial).

O 'Minor Theorem' afirma que

"A relação $\preceq$ é quase-boa-ordem sobre $\mathcal{G}$."

Como obviamente uma sequência estritamente decrescente de menores não pode ser infinita, a Proposição 9.2 nos dá que o 'Minor Theorem' é equivalente a sequinte afirmação:

"Não existe uma anticadeia infinita em $\mathcal{G}$."

Isto é, não existe um conjunto infinito de grafos em $\mathcal{G}$, dois-a-dois incomparáveis quanto à relação menor $\preceq$.

Restringindo-nos à classe das árvores, existe uma versão mais forte do 'Minor Theorem':

Teorema 9.5 Seja $\mathcal{T}$ a classe das árvores *finitas* a menos de isomorfismo e $\preceq$ a relação de menor topológico ($\preceq \equiv \preceq_t$). Então $\preceq$ é quase-boa-ordem sobre $\mathcal{T}$.

A prova será baseada numa relação mais forte definida sobre árvores enraizadas.

Se T é uma árvore e r um vértice qualquer fixo, chamaremos o par (T, r) de *árvore enraizada*, e r sua *raiz* (algumas vezes escrevemos simplesmente T, em vez de (T, r).

Dadas árvores enraizadas (T, r) e $(T', r1)$, escrevemos

$$(T, r) \preceq (T', r')$$

se existe um isomorfismo φ entre alguma subdivisão de T e uma subárvore T'' de T' tal que o caminho de r' a $\varphi(r)$ em T' não contém nenhum outro vértice de T'' a não ser $\varphi(r)$. Dizemos que um tal isomorfismo *respeita* r'.

Seja $\mathcal{T}^*$ o conjunto das árvores enraizadas finitas.

Provaremos então o teorema abaixo, do qual o Teorema 9.5 segue como corolário.

Teorema 9.6 (Kruskal, 1960 [Kru60]). A relação $\preceq$ é quase-boa-ordem sobre $\mathcal{T}^*$.

Demonstração. Novamente adotaremos a terminologia de sequências *ruins* para as que violam a propriedade de boa-fundação das relações e de sequências *boas* para as que não são ruins.

Suponha que $\preceq$ não seja quase-boa-ordem sobre $\mathcal{T}^*$ e vamos construir uma sequência ruim $(T_n, r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ especial em $\mathcal{T}^*$ recursivamente.

Dado $n \in \mathbb{N}$, suponha indutivamente que (T_i, r_i) já foi construído para todo $i < n$, e que exista uma sequência ruim começando com $(T_0, r_0), (T_1, r_1), \ldots, (T_{n-1}, r_{n-1})$.

Escolha então (T_n, r_n) com $|V(T_n)|$ mínimo e de forma que exista uma sequência ruim começando com $(T_0, r_0), (T_1, r_1), \ldots, (T_n, r_n)$ (para $n = 0$, temos que uma sequência ruim existe por $\prec$ não ser quase-boa-ordem).

Observe que $|V(T_n)| > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja A_n o conjunto das árvores enraizadas (T, r) tal que T é um componente conexo de $T_n - r_n$ e r é adjacente a r_n em T_n.

Seja $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Vamos provar que $\preceq$ é quase-boa-ordem sobre A.

Seja $((U_k, s_k))_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência qualquer de árvores enraizadas do conjunto A.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ escolha $n = n(k)$ tal que $U_k \in A_n$ e seja $k^* = \arg\min\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}$ ($n(k^*) \preceq n(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$).

Então a sequência

$$(W_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((T_0, r_0), \ldots, (T_{n(k^*)-1}, r_{n(k^*)-1}), (U_{k^*}, s_{k^*}), (U_{k^*+1}, s_{k^*+1}), \ldots)$$

é boa, pois $U_{k^*} \subsetneq T_{n(k^*)}$ (caso contrário, teríamos uma contradição com a minimalidade de $|V(T_{n(k^*)})|$).

Ou seja, existem índices $i < j$ tais que $(W_i, t_i) \preceq (W_j, t_j)$.

Observe que não podemos ter $j \leq n(k^*) - 1$, caso contrário, teríamos $(T_i, r_i) \preceq (T_j, r_j)$.

Também não podemos ter $i < n(k^*) \leq j$, caso contrário, teríamos $(T_i, r_i) \preceq (U_j, s_j) \preceq (T_{n(j)}, r_{n(j)})$ (pois $U_j \in A_{n(j)}$).

Logo, temos $n(k^*) \leq i$, ou seja, temos $(U_i, s_i) \preceq (U_j, s_j)$, o que significa que a sequência $(U_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é boa.

Portanto $\preceq$ é quase-boa-ordem sobre A.

Pelo Lema 9.4, temos que $\preceq$ é quase-boa-ordem sobre $[A]^{<\omega}$.

Em particular, isso significa que existem índices $i_0 < j_0$ tais que $A_{i_0} \preceq A_{j_0}$.

A partir da função $f\colon A_{i_0} \to A_{j_0}$, das subdivisões e isomorfismos que respeitam raiz que testemunham $A_{i_0} \preceq A_{j_0}$, segue que $(T_{i_0}, r_{i_0}) \preceq (T_{j_0}, r_{j_0})$.

Portanto $\preceq$ é quase-boa-ordem sobre $\mathcal{T}^*$. □

9.2 O 'MINOR THEOREM' PARA GRAFOS COM LARGURA ARBÓREA LIMITADA

Grafos com largura arbórea (la) limitada são suficientemente 'semelhantes' a árvores tornando possível adaptar a prova do Teorema de Kruskal (Teorema 9.6) para a classe desses grafos. Grosseiramente, a ideia é iterar o argumento da 'sequência minimal ruim' la(G) vezes. A prova desse resultado encontra-se no artigo "graph minors I", de Robertson & Seymour, 1990.

Teorema 9.7 [Robertson & Seymour, 1990] Para todo natural k, os grafos com largura arbórea menor que k são quase-bem-ordenados pela relação de *menor*.

Este teorema nos leva um passo adiante em relação à prova do 'Minor Theorem' (para grafos arbitrários). Para chegar a esse resultado geral, a seguinte questão é de interesse.

Pergunta: Como são os grafos com *largura arbórea limitada*?

Mais precisamente, há algum fenômeno estrutural que ocorre num grafo se e somente se ele tem la grande?

Obstruções canônicas à largura arbórea pequena

Dizemos que $X \subseteq V(G)$ é um *subconjunto conexo* se $G[X]$ é conexo.

Seja $\mathcal{C}$ um conjunto de subconjuntos conexos de $V(G)$.

Dizemos que um conjunto $U \subseteq V(G)$ cobre $\mathcal{C}$ se U intersecta cada conjunto em $\mathcal{C}$.

Dizemos que dois elementos de $\mathcal{C}$ se *tocam* ('touch') se eles se intersectam ou G contém uma aresta entre eles.

Exercício 9.1. Se $\mathcal{C}$ é um conjunto de subconjuntos conexos de $V(G)$ e quaisquer dois elementos de $\mathcal{C}$ se tocam, então em toda decomposição arbórea $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ de G existe $t \in V(T)$ tal que W_t cobre $\mathcal{C}$. [Sugestão: imitar a prova da Proposição 8.6]

Esse resultado prova o lado fácil ($\Leftarrow$) da seguinte caracterização de grafos com largura arbórea maior ou igual a k.

Teorema 9.8 [Seymour & Thomas, 1993] Seja k um inteiro. Um grafo G tem la$(G) \geq k$ se e somente se G contém uma coleção de conjuntos de vértices conexos que se tocam dois a dois e que não podem ser cobertos por até k vértices.

Outro teorema interessante faz uso de uma generalização de árvores:

Dizemos que um grafo é uma k-*árvore* se é um grafo cordal e tal que todas suas cliques maximais tem cardinalidade no máximo $k + 1$.

Dizemos que um grafo é uma k-*árvore-parcial* se é um subgrafo de uma k-árvore.

Teorema 9.9 Se G é uma k-árvore-parcial, então la$(G) \leq k$.

Interesse: Decomposição arbórea que dê mais informações sobre a estrutura arbórea do grafo (quão semelhante de uma árvore é o grafo). Exigir apenas largura arbórea pequena não captura como bolsas da decomposição se relacionam ao longo da árvore (da decomposição).

Dizemos que uma decomposição arbórea $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ de G é *interligada* ('linked') se, para todo $s \in \mathbb{N}$ e todos $t_1, t_2 \in V(T)$, existem s caminhos disjuntos de W_{t_1} a W_{t_2}.

Dizemos que uma decomposição arbórea $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ de G é *enxuta* ('lean') se, para todo $s \in \mathbb{N}$ e e todos $t_1, t_2 \in V(T)$, existe t no caminho de t_1 para t_2 em T tal que $|W_t| < s$.

O teorema abaixo afirma que é possível encontrar decomposições arbóreas com largura mínima e que são também enxutas:

Teorema 9.10 [Thomas,1990] Todo grafo G possui uma decomposição arbórea enxuta com largura $\mathrm{la}(G)$.

9.3 Decomposições arbóreas e menores proibidos

Seja $\mathcal{X}$ uma classe de grafos. Considere a classe dos grafos sem um menor em $\mathcal{X}$

$$\mathrm{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X}) \quad = \quad \{G \text{ grafo } : G \not\succeq X, \text{ para todo } X \in \mathcal{X}\}.$$

É fácil ver que $\mathrm{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ é uma *propriedade de grafos*, isto é, é fechada sob isomorfismo ($H \in \mathrm{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ e $H \cong H'$ implicam $H' \in \mathrm{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$).

Quando se tratar apenas de um grafo, escreveremos $\mathrm{Forb}_{\preceq}(G)$ em vez de $\mathrm{Forb}_{\preceq}(\{G\})$.

A classe $\mathrm{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ é expressa especificando-se os grafos $X \in \mathcal{X}$ como *menores proibidos* ('forbidden' ou 'excluded minors').

Exemplo 9.11 Se $\mathcal{X} = \{K_5, K_{3,3}\}$, então $\mathrm{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ é a classe dos grafos planares.

Se $\mathcal{X} = \{K_4\}$, então $\mathrm{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ é a classe dos grafos série-paralelos.

Se $\mathcal{X} = \{K_{2,3}, K_4\}$, então $\mathrm{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ é a classe dos grafos exoplanares.

Certamente $\mathrm{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ é fechada sob a operação de tomar menores, isto é, se $G \in \mathrm{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ e $H \preceq G$, então $H \in \mathrm{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$.

Propriedades de grafos que são fechadas sob tomada de menores são chamadas *hereditárias*.

A proposição abaixo afirma que as propriedades hereditárias coincidem exatamente com as classes de menores proibidos.

Proposição 9.12 Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade de grafos. A propriedade $\mathcal{P}$ pode ser expressa através de menores proibidos se e somente se $\mathcal{P}$ é hereditária.

Demonstração. Já vimos que $\mathrm{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ é uma propriedade hereditária para toda $\mathcal{X}$.

Por outro lado, sabemos que $\mathcal{P} = \mathrm{Forb}_{\preceq}(\overline{\mathcal{P}})$, onde $\overline{\mathcal{P}}$ é o complemento de $\mathcal{P}$. □

Pergunta: Como representar melhor uma propriedade hereditária através de menores proibidos?

Resposta mais adiante.

Por ora, considere a propriedade hereditária: largura arbórea limitada ('bounded tree width').

Proposição 9.13 Para todo $k > 0$, a propriedade de ter $\mathrm{la} < k$ é hereditária.

Demonstração. É suficiente provar que a largura arbórea de um grafo não aumenta quando contraímos uma aresta. O resultado segue da Proposição 8.2 e da propriedade de menores. □

Pelas proposições anteriores, a propriedade "ter largura arbórea menor que k" pode ser expressa por menores proibidos.

Seja $\mathcal{G}_{<k}$ = classe dos grafos com largura arbórea menor que k.

Para alguns valores fixos de k, já conhecemos essa classe:

- A classe $\mathcal{G}_{<2}$ é a classe das florestas (e coincide com $\mathrm{Forb}_{\preceq}(K_3)$);
- A classe $\mathcal{G}_{<3}$ é a classe dos grafos série-paralelos (e coincide com $\mathrm{Forb}_{\preceq}(K_4)$).

É natural perguntar se há outros grafos H para os quais os grafos em $\mathrm{Forb}_{\preceq}(H)$ têm largura arbórea limitada e como são tais grafos.

Proposição 9.14 Se H é um grafo tal que os grafos de $\mathrm{Forb}_{\preceq}(H)$ possuem largura arbórea limitada, então H é planar.

Demonstração. Sabemos que o grafo $G_{n\times n}$ da grade $n\times n$ possui largura arbórea $\mathrm{la}(G_{n\times n}) = n$, ou seja, existem grafos planares com largura arbórea arbitrariamente grande.

Como todo menor de um grafo planar é planar, se H não for planar, então $G_{n\times n}$ não o terá como menor. □

Teorema 9.15 [Robertson, Seymour & Thomas, 94] Para todo grafo planar H existe um inteiro n tal que $H \preceq G_{n\times n}$.

Teorema 9.16 Para todo grafo planar H existe um inteiro k tal que se um grafo G tem largura arbórea maior ou igual a k, então $H \preceq G$.

Corolário 9.17 Se H é um grafo planar, então os grafos de $\mathrm{Forb}_{\preceq}(H)$ têm largura arbórea limitada.

Corolário 9.18 [Robertson & Seymour] Grafos em $\mathrm{Forb}_{\preceq}(H)$ têm largura arbórea limitada se e somente se H é planar.

Existe um resultado análogo: troca-se la por pw e planar por floresta.

Teorema 9.19 [Robertson & Seymour,83] Grafos em $\mathrm{Forb}_{\preceq}(H)$ têm pw limitada se e somente se H é uma floresta.

Demonstração. Se H não é uma floresta, isto é, se H tem um circuito, então $\mathrm{Forb}_{\preceq}(H)$ contém todas as árvores.

Vamos provar então que árvores podem ter pw arbitrariamente grande.

Seja G um grafo conexo e $(P, \{W_t : t \in V(P)\})$ uma decomposição em caminho de G com largura $\mathrm{pw}(G)$. Suponha que os vértices de P são $1, 2, \ldots, k$ e $E(P) = \{ij : i - j = 1\}$.

Tome $v_1 \in W_1$ e $v_k \in W_k$ e seja Q um caminho de v_1 a v_k em G.

Então a decomposição em caminho $(P, \{W_t \setminus V(Q) : t \in V(P)\})$ de $G - Q$ possui largura $\mathrm{pw}(G) - 1$, pois Q deve possuir pelo menos um vértice em cada bolsa (segue da Proposição 8.5).

Portanto todo grafo conexo G contém um caminho Q tal que $\mathrm{pw}(G - Q) \leq \mathrm{pw}(G) - 1$. Assim, se pudermos assumir (por alguma hipótese de indução apropriada) que $\mathrm{pw}(G-Q)$ é grande para todo caminho $Q \subseteq G$, então $\mathrm{pw}(G)$ também será grande.

Usando esse fato, vamos provar que árvores podem ter pw arbitrariamente grande.

Para todo $k \geq 1$, seja $T_3^k \equiv$ a árvore ternária com raiz r e todas suas folhas à distância k de r (a raiz possui grau 3, as folhas possuem grau 1 e todos os demais vértices possuem grau 4).

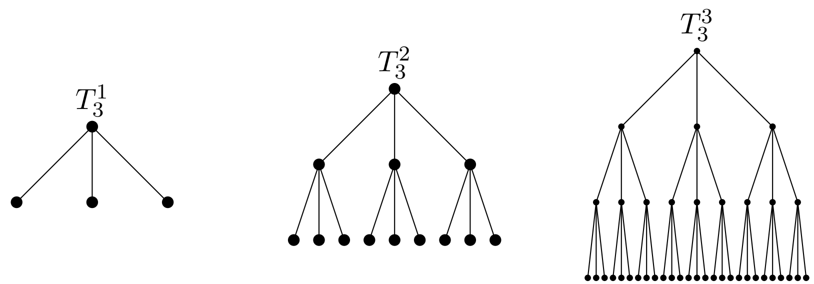

Figura 9.1: Árvores ternárias T_3^0, T_3^1 e T_3^2.

Observe que, se Q é um caminho em T_3^{k+1}, então Q contém no máximo duas das arestas incidentes a r. Logo temos $T_3^{k+1} - Q \supseteq T_3^k$, donde segue que $\mathrm{pw}(T_3^{k+1} \geq \mathrm{pw}(T_3^k) + 1$ para todo $k \geq 1$.

Como $\text{pw}(T_3^2) \geq 1$, segue por indução que $\text{pw}(T_3^k) \geq k$ para todo $k \geq 1$.

Portanto existem árvores com pw arbitrariamente grande, logo grafos de $\text{Forb}_{\preceq}(H)$ têm pw limitada implica que H é uma floresta.

□

9.4 O 'MINOR THEOREM'

Teoremas que caracterizam uma propriedade hereditária $\mathcal{P}$ através de um conjunto $\mathcal{X}$ de menores proibidos estão entre os resultados mais atraentes na teoria dos grafos.

Tais teoremas dão um sabor de coNP à propriedade $\mathcal{P}$, pois para certificar que um grafo G não satisfaz $\mathcal{P}$, basta apresentar o menor proibido que G possui.

Claramente, podemos caracterizar $\mathcal{P}$ como $\text{Forb}_{\preceq}(\overline{\mathcal{P}})$, mas o interessante é caracterizar $\mathcal{P}$ como $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ com $\mathcal{X}$ menor possível.

Proposição 9.20 A classe $\mathcal{X} \subseteq \overline{\mathcal{P}}$ é minimal à propriedade $\mathcal{P} = \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ se e somente se $\mathcal{X}$ contém exatamente uma cópia de cada grafo $\preceq$-minimal em $\overline{\mathcal{P}}$.

Demonstração. Claramente, se $\mathcal{X}$ possuir um grafo H que não é $\preceq$-minimal em $\overline{\mathcal{P}}$ porque digamos $H \succeq K \in \overline{\mathcal{P}}$ e $H \neq K$, então teremos $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X}) = \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X} \setminus \{H\}$, pois todos os grafos que possuem H como menor também possuem K como menor.

Por outro lado, se um grafo $\preceq$-minimal H de $\overline{\mathcal{P}}$ não estiver em $\mathcal{X}$, então teremos $H \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$.

Logo $\mathcal{X}$ é minimal implica que $\mathcal{X}$ contém exatamente os grafos que são $\preceq$-minimais em $\overline{\mathcal{P}}$.

Por outro lado, se $\mathcal{X}$ contém exatamente os grafos que são $\preceq$-minimais em $\overline{\mathcal{P}}$, então todo grafo $H \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ está em $\mathcal{P}$ (caso contrário H possuiria um menor $\preceq$-minimal de $\overline{\overline{\mathcal{P}}}$).

A outra inclusão segue da hereditariedade de $\mathcal{P}$. □

A proposição acima implica que existe um único conjunto minimal de menores proibidos (a menos de isomorfismo) para uma propriedade hereditária.

Ademais, os elementos desse conjunto são incomparáveis sob $\preceq$. O 'Minor Theorem' (enunciado a seguir) implica que qualquer conjunto de grafos $\preceq$-incomparáveis é finito.

Teorema 9.21 [Minor Theorem; Robertson & Seymour, 1986-97] Os grafos finitos são quase-bem-ordenados pela relação de menor $\preceq$.

Corolário 9.22 Toda propriedade de grafos que é fechada sob tomada de menores pode ser expressa como $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ com $\mathcal{X}$ finito.

Como a propriedade de "ser imersível numa superfície" é fechada sob tomada de menores, o seguinte corolario segue.

Corolário 9.23 Para toda superfície S existe um conjunto finito de grafos $\mathcal{X}$ tal que $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ contém precisamente os grafos não-imersíveis em S.

A título de curiosidade, a propriedade de imersibilidade no plano projetivo equivale a um total 35 menores proibidos.

9.5 EXERCÍCIOS

Exercício 9.2. Sejam $\preceq_1$ e $\preceq_2$ quase-boas-ordens sobre Q_1 e Q_2 respectivamente. Seja também $Q = Q_1 \times Q_2$ e defina a relação $\preceq$ sobre Q da seguinte forma:

$$(q_1, q_2) \preceq (q_1', q_2') \quad \text{se} \quad q_1 \preceq_1 q_1' \quad \text{e} \quad q_2 \preceq_2 q_2'.$$

Prove que $\preceq$ é uma quase-boa-ordem sobre Q.

Exercício 9.3. Mostre que não vale um resultado análogo ao Lema 9.4 para subconjuntos infinitos de X, denotado por X^ω.

Para isso, seja Q o conjunto de todos os pares (i, j) de inteiros $1 \leq i < j$ e considere a relação $\preceq$ sobre Q definida por

$$(i,j) \preceq (i',j') \quad \text{se} \quad (i = i' \quad \text{e} \quad j \leq j') \quad \text{ou} \quad (j < i'),$$

e defina $Q^\omega = \{A \subset Q : A \text{ é infinito}\}$ e a relação $\preceq_\omega$ sobre Q^ω definida por

$$A \preceq_\omega B, \quad \begin{array}{l}\text{se existe uma função injetora } f\colon A \to B \\ \text{tal que } a \preceq f(a) \text{ para todo } a \in A.\end{array}$$

Prove que $\preceq$ é quase-boa-ordem sobre Q mas $\preceq_\omega$ não é quase-boa-ordem sobre Q^ω.

Exercício 9.4. Prove que a relação de subgrafo não é uma quase-boa-ordem sobre o conjunto das árvores finitas. (Veja Ex 7 do Cap. 12 do Diestel.)

Exercício 9.5. Prove que a relação de menor topológico não é uma quase-boa-ordem sobre o conjunto dos grafos finitos. (Veja sugestão no Ex do Cap 12 do Diestel.)

9.6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[AH89] K.I. Appel and W. Haken. *Every Planar Map Is Four Colorable*. Contemporary mathematics, v. 98. American Mathematical Society, 1989.

[BM08] A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2008.

[Bol98] B. Bollobás. *Modern graph theory*. Graduate Texts in Mathematics Series. Springer-Verlag GmbH, 1998.

[Bro87] R.L. Brooks. On colouring the nodes of a network. In Ira Gessel and Gian-Carlo Rota, editors, *Classic Papers in Combinatorics*, Modern Birkhäuser Classics, pages 118–121. Birkhäuser Boston, 1987.

[CCPS11] W.J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank, and A. Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, 2011.

[CRST06] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. The strong perfect graph theorem. *ANNALS OF MATHEMATICS*, 164:51–229, 2006.

[Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.

[ES35] P. Erdös and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.*, 2:463–470, 1935.

[Fle14] Tamás Fleiner. Yet another proof for brooks' theorem. Technical Report QP-2014-01, Egerváry Reserch Group, Budapest, 2014. www.cs.elte.hu/egres.

[HS70] A. Hajnal and E. Szemerédi. Proof of a conjecture of P. Erdős. In *Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969)*, pages 601–623. North-Holland, Amsterdam, 1970.

[HT74] John Hopcroft and Robert Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of the ACM (JACM)*, 21(4):549–568, 1974.

[Kru60] J. B. Kruskal. Well-quasi-ordering, the Tree Theorem, and Vazsonyi's conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95:210–225, 1960.

[Lov75] L Lovász. Three short proofs in graph theory. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 19(3):269 – 271, 1975.

[Mac37] Saunders MacLane. A combinatorial condition for planar graphs. *Fund. Math*, 28:22–32, 1937.

[Mak97] Yury Makarychev. A short proof of kuratowski's graph planarity criterion. *J. Graph Theory*, 25:129–131, 1997.

[NC88] Takao Nishizeki and Norishige Chiba. *Planar graphs: Theory and algorithms*, volume 140. North Holland, 1988.

[NRS06] Brendan Nagle, Vojtech Rödl, and Mathias Schacht. The counting lemma for regular k-uniform hypergraphs. *Random Struct. Algorithms*, 28(2):113–179, 2006.

[OPT01] Deryk Osthus, Hans Jürgen Prömel, and Anusch Taraz. Almost all graphs with high girth and suitable density have high chromatic number. *J. Graph Theory*, 37(4):220–226, August 2001.

[Ore55] Oystein Ore. Graphs and matching theorems. *Duke Math. J.*, 22:625–639, 1955.

[PL86] D. Plummer and L. Lovász. *Matching Theory*. North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science, 1986.

[Ric46] M. Richardson. On weakly ordered systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:113–116, 1946.

[Tho80] C. Thomassen. *Kuratowski's Theorem*. Preprint series: Matematisk Institut. Matematisk Inst., Univ., 1980.

[Tho81] Carsten Thomassen. Kuratowski's theorem. *Journal of Graph Theory*, 5:225–241, 1981.

[Tho88] Andrew Thomason. An upper bound for some Ramsey numbers. *J. Graph Theory*, 12(4):509–517, 1988.

[TT81] C. Thomassen and B. Toft. Non-separating induced cycles in graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 31(2):199–224, October 1981.

[Wes] Douglas B. West. Ore, Berge–Tutte, and Gallai–Edmonds.

[Wes11] Douglas B. West. A short proof of the Berge–Tutte Formula and the Gallai–Edmonds Structure Theorem. *European Journal of Combinatorics*, 32(5):674–676, 2011.