

8 DECOMPOSIÇÃO ARBÓREA / LARGURA ARBÓREA

Uma **decomposição arbórea** (d.a.) de um grafo G é um par $(T, \mathcal{W})$, onde

- T é uma árvore e
- $\mathcal{W} = \{W_t \subseteq V(G) : t \in V(T)\}$ é uma família de conjuntos de vértices de G indexada pelos vértices de T ;

E são tais que

- O conjunto $\mathcal{W}$ cobre $V(G)$ (i.e., temos $\bigcup_{t \in V(T)} W_t = V(G)$), e toda aresta de G tem ambos os extremos em algum W_t (i.e., temos $\bigcup_{t \in V(T)} E(G[W_t]) = E(G)$); e
- se $t, t', t'' \in V(T)$ e t' está no (único) caminho de t para t'' em T então $W_t \cap W_{t''} \subseteq W_{t'}$.

A **largura** (width) da decomposição arbórea $(T, \mathcal{W})$ é definida como

$$\max\{|W_t| - 1 : t \in V(T)\}$$

e sua **ordem** como

$$\begin{cases} 0 & \text{se } E(T) = \emptyset; \text{ e} \\ \max\{|W_t \cap W_{t'}| : t, t' \text{ adjacentes em } T\} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplos. Considere $G = C_5$ com $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ e $E(G) = \{ab, bc, cd, de, ea\}$.

- Uma decomposição arbórea de C_5 : $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$, onde $V(T) = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, $E(T) = \{t_i t_{i+1} : i \in \{1, 2, 3\}\}$ e $W_{t_1} = \{a, b\}$, $W_{t_2} = \{a, b, c\}$, $W_{t_3} = \{a, b, c, d\}$, $W_{t_4} = \{a, b, c, d, e\}$.

Essa decomposição tem largura 4 e ordem 4.

- Uma outra decomposição arbórea de C_5 : $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$, onde $V(T) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$, $E(T) = \{t_i t_{i+1} : i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ e $W_{t_1} = \{a, b\}$, $W_{t_2} = \{a, b, c\}$, $W_{t_3} = \{a, c, d\}$, $W_{t_4} = \{a, d, e\}$, $W_{t_5} = \{a, e\}$.

Essa decomposição tem largura 2 e ordem 2.

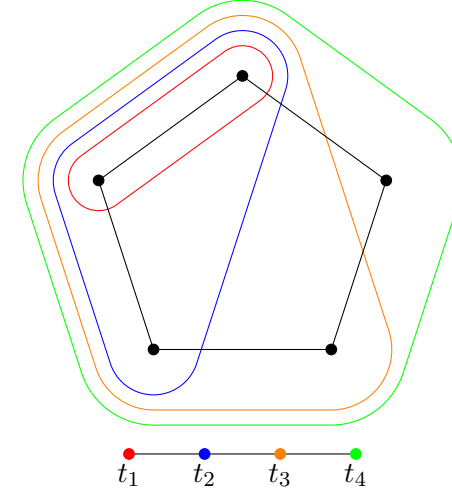


Figura 8.1: Exemplo a de decomposição arbórea do C_5 .

- Outra decomposição arbórea de C_5 : $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$, onde $V(T) = \{t_1, t_2, t_3\}$, $E(T) = \{t_i t_{i+1} : i \in \{1, 2\}\}$ e $W_{t_1} = \{a, b, c\}$, $W_{t_2} = \{a, c, d\}$, $W_{t_3} = \{a, d, e\}$.

Essa decomposição tem largura 2 e ordem 2.

- Outra decomposição arbórea de C_5 : $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$, onde $V(T) = \{t_1\}$, $E(T) = \emptyset$ e $W_{t_1} = V(G)$.

Essa decomposição é chamada de **Decomposição Arbórea Trivial** e tem largura $|V(G)| - 1$ e ordem 0. Todos os grafos possuem tal decomposição, elas não são de nenhum interesse.

Os exemplos acima foram todos dados com T um caminho, mas a estrutura de árvore pode ser útil para construirmos uma decomposição de largura pequena, como sugerido pelo exemplo a seguir.

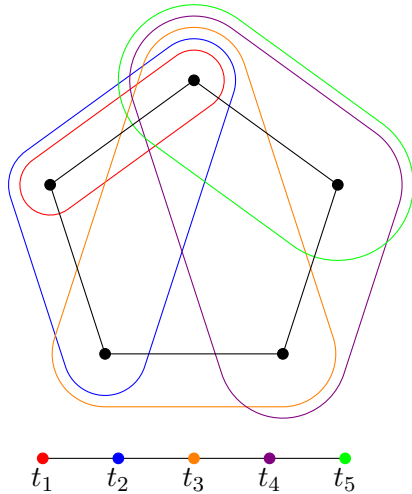


Figura 8.2: Exemplo **b** de decomposição arbórea do C_5 .

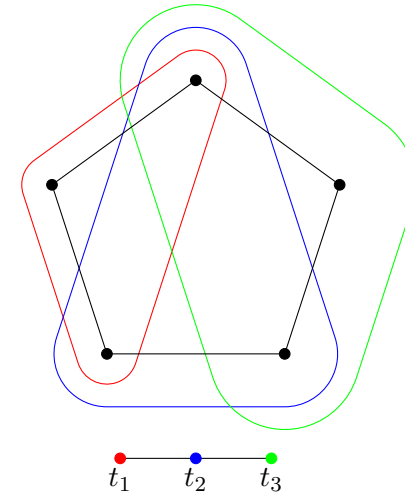


Figura 8.3: Exemplo **c** de decomposição arbórea do C_5 .

Exemplo 8.1 Considere o grafo G definido por $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $E(G) = \{ab, ad, bc, bd, be, ce, df, ef\}$.

Uma decomposição arbórea de G é $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$, onde $V(T) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$, $E(T) = \{t_i t_4 : i \in \{1, 2, 3\}\}$ e $W_{t_1} = \{a, b, d\}$, $W_{t_2} = \{b, c, e\}$, $W_{t_3} = \{d, e, f\}$, $W_{t_4} = \{b, d, e\}$.

Esta decomposição tem largura 2 e ordem 2.

As decomposições arbóreas interessantes são as de largura pequena, pois muitos algoritmos exploram tal decomposição e levam tempo exponencial em sua largura.

Claramente é mais difícil conseguirmos uma decomposição arbórea em que a árvore em questão é um caminho, quando o fazemos, a decomposição obtida é chamada de **decomposição em caminho**.

Dada uma decomposição arbórea $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ de G , para cada $t \in T$ podemos escolher um subgrafo X_t de G com conjunto de

vértices W_t tal que cada aresta de G está em precisamente um desses subgrafos. Tal escolha determina uma partição de $E(G)$ (note que X_t não precisa ser necessariamente conexo).

No caso do Exemplo 8.1, podemos ter $E(X_{t_1}) = \{ab, ad\}$, $E(X_{t_2}) = \{bc, be, ce\}$, $E(X_{t_3}) = \{df, ef\}$, $E(X_{t_4}) = \{bd, de\}$.

Dada uma decomposição arbórea $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ de G , para cada $v \in V(G)$ definimos T_v como o subgrafo de T gerado por todos os vértices t de T tais que $v \in W_t$.

Note que, das propriedades **i** e **ii** segue que T_v é uma árvore. No Exemplo 8.1, temos $V(T_a) = \{t_1\}$, $V(T_b) = \{t_1, t_2, t_4\}$, $V(T_c) = \{t_2\}$, $V(T_d) = \{t_1, t_3, t_4\}$, $V(T_e) = \{t_2, t_3, t_4\}$, $V(T_f) = \{t_3\}$.

Dizemos que $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ é uma **decomposição arbórea em cliques** se todo W_t induz uma clique em G . No Exemplo 8.1, a decomposição arbórea que exibimos é uma decomposição arbórea em

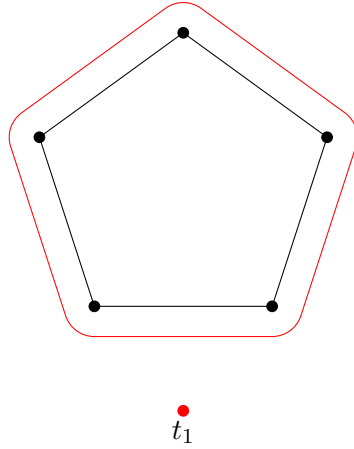


Figura 8.4: Exemplo **d** de decomposição arbórea do C_5 .

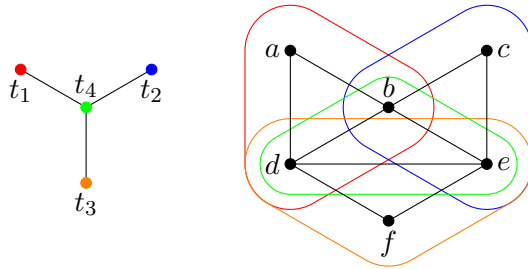


Figura 8.5: Exemplo 8.1 de decomposição arbórea.

cliques.

A **largura arbórea** de um grafo G (denotada por $la(G)$) é o menor inteiro k tal que G possui uma decomposição arbórea de largura k .

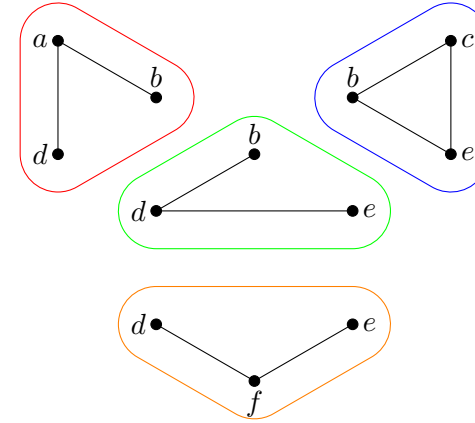


Figura 8.6: Partição das arestas do Exemplo 8.1.

Analogamente, a **largura de caminho** ('path width') de um grafo G (denotada por $pw(G)$) é o menor inteiro k tal que G possui uma decomposição em caminho de largura k .

Exercício 8.1. Seja G um grafo simples. Prove que $la(G) \leq 1$ se e somente se G é uma floresta.

Um grafo é dito **série-paralelo** se não possui K_4 como menor.

Exercício 8.2. Prove que se G é série-paralelo, então $la(G) \leq 2$.

Proposição 8.2 Seja $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ uma decomposição arbórea de um grafo G , e $H \subseteq G$ (H um subgrafo de G). Então tomando $\mathcal{W}_H = \{W_t \cap V(H) : t \in V(T)\}$, temos que $(T, \mathcal{W}_H)$ é uma decomposição arbórea de H .

Demonstração. Se $t' \in V(T)$ está no caminho entre t e t'' , então $W_t \cap W_{t''} \subseteq W_{t'}$, logo $(W_t \cap V(H)) \cap (W_{t''} \cap V(H)) \subseteq W_{t'} \cap V(H)$. $\square$

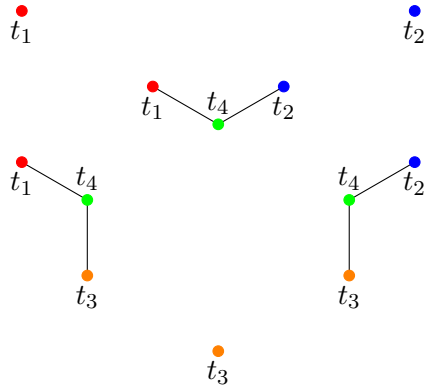


Figura 8.7: Subárvores T_v relativas ao Exemplo 8.1.

Convenção: Para simplificar, diremos “ $K \subseteq V(G)$ é uma clique”, devendo ficar implícito que “ $G[K]$ é uma clique”.

As proposições abaixo estudam o comportamento dos cliques em decomposições arbóreas de um grafo.

Proposição 8.3 Seja $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ uma decomposição arbórea de um grafo G , e seja $K \subseteq V(G)$ uma clique. Então existe $t \in V(T)$ tal que $K \subseteq W_t$.

Demonstração. Sejam $u, v \in K$ e considere T_u e T_v .

Claramente $V(T_u) \cap V(T_v) \neq \emptyset$ (pois existe $x \in V(T)$ tal que $W_x \supseteq \{u, v\}$).

Portanto, para todos $u, v \in K$, temos $V(T_u) \cap V(T_v) \neq \emptyset$.

Se $|K| \leq 2$, apenas essa propriedade já é suficiente para provar a proposição. Então suponha $|K| \geq 3$.

Seja $x \in V(T)$ com $|W_x \cap K|$ maior possível e suponha por absurdo que $|W_x \cap K| < |K|$. Então existe $v \in K \setminus W_x$.

Seja $y \in V(T_v)$ com $|W_y \cap W_x \cap K|$ maior possível e note que $x \neq y$ pois $x \notin V(T_v)$.

Pela escolha de x , temos que $|W_y \cap K| \leq |W_x \cap K|$, como $v \in K \cap W_y \setminus W_x$, então existe $u \in K \cap W_x \setminus W_y$.

Seja $z \in V(T_u) \cap V(T_v)$ (já vimos que esse conjunto não é vazio).

Se x estiver no caminho de y a z em T , teremos $v \in W_y \cap W_z \subset W_x \not\ni v$, um absurdo.

Se y estiver no caminho de x a z em T , teremos $u \in W_x \cap W_z \subset W_y \not\ni u$, também um absurdo.

Seja então z_0 o vértice mais próximo de z do caminho de x a y em T (possivelmente teremos $z_0 = z$). Observe que z_0 está também no caminho de x a z , logo $u \in W_{z_0}$.

Por outro lado, como z_0 está no caminho de x a y , temos $W_x \cap W_y \subset W_{z_0}$, logo $|W_{z_0} \cap W_x \cap K| \geq |W_y \cap W_x \cap K| + 1$, o que contradiz a escolha de y . $\square$

Proposição 8.4 Se G tem uma decomposição arbórea em cliques então G tem uma decomposição arbórea em cliques $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ onde cada W_t é uma clique maximal.

Demonstração. Seja $(T, \mathcal{W})$, com $\mathcal{W} = \{W_t : t \in V(T)\}$ uma decomposição arbórea de G em cliques com $|V(T)|$ mínimo. Suponha que existe $t_1 \in V(T)$ tal que W_{t_1} não é uma clique maximal. Seja K uma clique maximal tal que $K \supseteq W_{t_1}$. Pela Proposição 8.3, existe $t_2 \in V(T)$ tal que $W_{t_2} \supseteq K$.

Seja t_3 um vértice adjacente a t_1 no caminho em T de t_1 a t_2 (possivelmente temos $t_3 = t_1$) e observe que $W_{t_1} \subset W_{t_3}$.

Tome $T' = T / \{t_1, t_3\}$ e $\mathcal{W}' = \{W_t : t \in V(T) \setminus \{t_1, t_3\}\} \cup \{W_{t_0}\}$, onde $W_{t_0} = W_{t_3}$ e t_0 é o vértice obtido da contração de $\{t_1, t_3\}$.

Observe que $(T', \mathcal{W}')$ é uma decomposição arbórea de G em cliques com $|V(T')| < |V(T)|$, o que contradiz a escolha de $(T, \mathcal{W})$. $\square$

A proposição abaixo mostra que a árvore de uma decomposição arbórea transfere a propriedade de separação para o grafo que ela decompõe.

Proposição 8.5 Seja $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ uma decomposição arbórea de um grafo G . Seja $e = t_1 t_2$ uma aresta de T e sejam T_1 e T_2 as componentes conexas de $T - e$ com $t_1 \in V(T_1)$ e $t_2 \in V(T_2)$ (T_1 e T_2 são árvores). Sejam também

$$U_1 = \bigcup_{t \in V(T_1)} W_t \quad U_2 = \bigcup_{t \in V(T_2)} W_t.$$

Então $W_{t_1} \cap W_{t_2} = U_1 \cap U_2$ e $W_{t_1} \cap W_{t_2}$ separa U_1 de U_2 em G .

Demonstração. Sejam $t \in V(T_1)$, $t' \in V(T_2)$ e observe que todo caminho de t para t' em T contém t_1 e t_2 , logo temos

$$\begin{aligned} W_t \cap W_{t'} &\subseteq W_{t_1}, \text{ e} \\ W_t \cap W_{t'} &\subseteq W_{t_2}; \end{aligned}$$

o que significa que

$$W_t \cap W_{t'} \subseteq W_{t_1} \cap W_{t_2}.$$

Portanto, para todos $t \in T_1$ e $t' \in T_2$, temos $W_t \cap W_{t'} \subseteq W_{t_1} \cap W_{t_2}$. Segue então que

$$U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup_{t \in V(T_1)} W_t \right) \cap \left(\bigcup_{t' \in V(T_2)} W_{t'} \right) \subseteq W_{t_1} \cap W_{t_2}.$$

Por outro lado, como $W_{t_1} \subseteq U_1$ e $W_{t_2} \subseteq U_2$, temos $W_{t_1} \cap W_{t_2} \subseteq U_1 \cap U_2$.

Portanto $U_1 \cap U_2 = W_{t_1} \cap W_{t_2}$.

Para mostrar que $W_{t_1} \cap W_{t_2}$ separa U_1 de U_2 , vamos mostrar que não existe aresta $u_1 u_2$ em G com $u_1 \in U_1 \setminus U_2$ e $u_2 \in U_2 \setminus U_1$.

Se houvesse tal aresta $u_1 u_2$ em G , então existiria um $t \in V(T)$ tal que $W_t \supseteq \{u_1, u_2\}$. Mas $u_1 \in U_1 \setminus U_2$ e $u_1 \in W_t$ implicam que $t \in V(T_1) \setminus V(T_2)$ e $u_2 \in U_2 \setminus U_1$ e $u_2 \in W_t$ implicam que $t \in V(T_2) \setminus V(T_1)$, o que seria uma contradição. $\square$

Proposição 8.6 Seja $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ uma decomposição arbórea de um grafo G , e seja $Y \subseteq V(G)$. Então

- (a) ou existe $t \in V(T)$ tal que $Y \subseteq W_t$,
- (b) ou existem vértices $y_1, y_2 \in Y$ e uma aresta $t_1 t_2$ de T tais que $y_1, y_2 \notin W_{t_1} \cap W_{t_2}$ e y_1, y_2 são separados por $W_{t_1} \cap W_{t_2}$ em G .

8.1 DECOMPOSIÇÃO ARBÓREAS E GRAFOS CORDAIS

Lembremos a definição de grafos cordais e algumas de suas propriedades.

Um grafo é dito **cordal** ou **triangulado** se é simples e não possui nenhum circuito induzido de comprimento maior ou igual a 4.

Proposição 8.7 (Proposição C (pp. 111, Diestel)). Um grafo G é cordal se e somente se G é a união de grafos cordais estritamente menores G_1 e G_2 com $G_1 \cap G_2$ completo, isto é, existem subconjuntos próprios de vértices $X, Y \subsetneq V(G)$ distintos tais que $V(G) = X \cup Y$, o grafo $G[X \cap Y]$ é completo e os grafos $G[X]$ e $G[Y]$ são cordais.

Exercício 8.3. Todo conjunto separador minimal de um grafo cordal é um clique.

Proposição 8.8 Seja G um grafo simples. Então G é cordal se e somente se tem uma decomposição arbórea em cliques.

Demonstração. Por indução em $|V(G)|$.

(a) Seja $(T, \mathcal{W})$ uma decomposição arbórea de G tal que W_t é uma clique para todo $t \in T$ e, além disso, com $|V(T)|$ mínimo.

Se $|V(T)| \leq 1$ então G é completo e, portanto, cordal. Suponha então $|V(T)| \geq 2$, tome $e = t_1 t_2 \in E(T)$ e considere as subárvores T_1 e T_2 de $T - e$, com $t_1 \in T_1$ e $t_2 \in T_2$ (como na Proposição 8.5).

Então $T = (T_1 \cup T_2) + t_1 t_2$. Seja, para $i \in \{1, 2\}$, o grafo $G_i = G[\cup_{t \in T_i} W_t]$, e observe que $V(G_1 \cap G_2) = W_{t_1} \cap W_{t_2}$, pela Proposição 8.5. Isso significa que $G_1 \cap G_2$ é completo.

Como $(T_i, \{W_t : t \in V(T_i)\})$ é uma decomposição arbórea de G_i em cliques, pela hipótese de indução, temos que G_1 e G_2 são cordais.

Note que, pela escolha de $(T, \mathcal{W})$, nenhum dos G_i 's é um subgrafo de $G[W_{t_1} \cap W_{t_2}] = G_1 \cap G_2$ e, portanto, ambos são menores do que G . Portanto, pela Proposição 8.7, temos que G é cordal.

(b) Suponha que G seja cordal. Se G é completo, o resultado é imediato.

Se G não é completo, pela Proposição 8.7, sabemos que G é a união de grafos cordais menores G_1, G_2 com $G_1 \cap G_2$ completo.

Pela hipótese de indução, ambos G_1 e G_2 têm decomposições arbóreas $(T_1, \{W_t : t \in V(T_1)\})$ e $(T_2, \{W_t : t \in V(T_2)\})$ em cliques. Sem perda de generalidade, assumimos que $V(T_1) \cap V(T_2) = \emptyset$.

Pela Proposição 8.3, temos que $G_1 \cap G_2 \subseteq W_{t_1}$ e $G_1 \cap G_2 \subseteq W_{t_2}$ para algum $t_1 \in V(T_1)$ e algum $t_2 \in V(T_2)$. Neste caso, $((T_1 \cup T_2) + t_1 t_2, \{W_t : t \in V(T_1) \cup V(T_2)\})$ é uma decomposição arbórea de G em cliques. [Verificar isso].

□

Corolário 8.9 Para todo grafo G , temos $\text{la}(G) = \min\{\omega(H) - 1 \mid H \text{ cordal}; V(H) = V(G), E(H) \supseteq E(G)\}$.

Demonstração. Dado G , considere um grafo H cordal qualquer com $V(H) = V(G)$ e $E(H) \supseteq E(G)$. Pelas Proposições 8.3 e 8.8, o grafo H tem uma decomposição arbórea em cliques com largura $\omega(H) - 1$.

Essa decomposição arbórea de H é também uma decomposição arbórea de G e, portanto,

$$\text{la}(G) \leq \omega(H) - 1.$$

Considere agora uma decomposição arbórea de $(T, \mathcal{W})$ de G , com largura $\text{la}(G)$ e, para cada $t \in T$, seja K_t o grafo completo com conjunto de vértices W_t , e defina $H = \cup_{t \in T} K_t$.

Então H é um grafo cordal com $V(H) = V(G)$ e $E(H) \supseteq E(G)$; além disso, sabemos que $(T, \mathcal{W})$ também é uma decomposição arbórea de H . Pela Proposição 8.3, temos que $\omega(H) - 1$ é igual à largura de $(T, \mathcal{W})$, ou seja

$$\omega(H) - 1 \leq \text{la}(G).$$

□

Corolário 8.10 Todo grafo G tem uma decomposição arbórea $(T, \mathcal{W})$ de largura $\text{la}(G)$ e com $|V(T)| \leq |V(G)|$.

Demonstração. O Corolário 8.9 nos diz que existe um grafo cordal H tal que $V(H) = V(G)$ e $\text{la}(G) = \omega(H) - 1$. Pelas Proposições 8.3, 8.4 e 8.8, o grafo H possui uma decomposição arbórea $(T, \mathcal{W})$ em cliques maximais com largura $\omega(H) - 1 = \text{la}(G)$.

Como todos os cliques dessa decomposição são maximais, cada clique da decomposição contém pelo menos um vértice que não está em nenhum outro clique da decomposição. Logo temos $|V(T)| \leq |V(H)| = |V(G)|$.

Também sabemos que essa decomposição arbórea de H é também uma decomposição arbórea de G , de onde o resultado segue. □

8.2 EXERCÍCIOS

Exercício 8.4. Prove que $\text{la}(K_n) = n - 1$.

Exercício 8.5. O grafo da grade de ordem n denotado por $G_{n \times n}$ é definido a partir de $V(G_{n \times n}) = [n] \times [n]$ e $E(G_{n \times n}) = \{(a, b)(c, d) : |a - c| + |b - d| = 1\}$.

Prove que, para $n \geq 2$, temos $\text{la}(G_{n \times n}) = n$.

Exercício 8.6. Mostre que um grafo G tem uma decomposição em caminhos (d.c.) em grafos completos se e só se G é isomorfo a um grafo de intervalos. (Veja Ex 21 do Cap. 12 do Diestel.)

Exercício 8.7. O jogo dos policiais e ladrão sobre um grafo G é jogado por dois jogadores, o primeiro jogador controla k policiais e o segundo jogador controla um ladrão.

O objetivo do primeiro jogador é colocar um policial no mesmo vértice do ladrão e o objetivo do segundo jogador é evitar isso.

O primeiro jogador move um policial de cada vez utilizando um helicóptero (i.e., os policiais não tem nenhuma restrição de movimento), assim que o primeiro jogador decide qual será seu movimento, o segundo jogador pode mandar seu ladrão correr rapidamente para qualquer vértice adjacente, de forma que o ladrão consegue escapar mesmo se o policial estiver pousando no vértice dele. Portanto, para conseguir pegar o ladrão, o primeiro jogador deve primeiro ocupar todos os vértices adjacentes e pousar com um outro policial no vértice do ladrão.

Existem duas variações desse jogo, a com ladrão visível (i.e., o primeiro jogador sabe em todo momento onde está o ladrão) e a com ladrão invisível (i.e., o primeiro jogador não sabe onde está o ladrão).

- Prove que o resultado do jogo não se altera se removermos laços e arestas múltiplas. Prove também que podemos assumir sem perda de generalidade que o grafo é conexo.
- Prove que dois policiais conseguem capturar o ladrão visível em um grafo simples e conexo G se e somente se G é uma árvore.
- Prove que dois policiais conseguem capturar o ladrão invisível em um grafo simples e conexo G se e somente se G é um “caterpillar”

(i.e., existe um caminho P em G tal que todo vértice de G está ou em P ou é adjacente a um vértice de P).

- Prove que, em um grafo simples e conexo G , o ladrão visível pode ser pego por $\text{la}(G)$ policiais.

8.3 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [AH89] K.I. Appel and W. Haken. *Every Planar Map Is Four Colorable*. Contemporary mathematics, v. 98. American Mathematical Society, 1989.
- [BM08] A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2008.
- [Bol98] B. Bollobás. *Modern graph theory*. Graduate Texts in Mathematics Series. Springer-Verlag GmbH, 1998.
- [Bro87] R.L. Brooks. On colouring the nodes of a network. In Ira Gessel and Gian-Carlo Rota, editors, *Classic Papers in Combinatorics*, Modern Birkhäuser Classics, pages 118–121. Birkhäuser Boston, 1987.
- [CCPS11] W.J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank, and A. Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, 2011.
- [CRST06] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. The strong perfect graph theorem. *ANNALS OF MATHEMATICS*, 164:51–229, 2006.
- [Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.
- [ES35] P. Erdős and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.*, 2:463–470, 1935.

- [Fle14] Tamás Fleiner. Yet another proof for brooks’ theorem. Technical Report QP-2014-01, Egerváry Reserch Group, Budapest, 2014. www.cs.elte.hu/egres.
- [HS70] A. Hajnal and E. Szemerédi. Proof of a conjecture of P. Erdős. In *Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969)*, pages 601–623. North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [HT74] John Hopcroft and Robert Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of the ACM (JACM)*, 21(4):549–568, 1974.
- [Kru60] J. B. Kruskal. Well-quasi-ordering, the Tree Theorem, and Vazsonyi’s conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95:210–225, 1960.
- [Lov75] L Lovász. Three short proofs in graph theory. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 19(3):269 – 271, 1975.
- [Mac37] Saunders MacLane. A combinatorial condition for planar graphs. *Fund. Math*, 28:22–32, 1937.
- [Mak97] Yury Makarychev. A short proof of kuratowski’s graph planarity criterion. *J. Graph Theory*, 25:129–131, 1997.
- [NC88] Takao Nishizeki and Norishige Chiba. *Planar graphs: Theory and algorithms*, volume 140. North Holland, 1988.
- [NRS06] Brendan Nagle, Vojtech Rödl, and Mathias Schacht. The counting lemma for regular k -uniform hypergraphs. *Random Struct. Algorithms*, 28(2):113–179, 2006.
- [OPT01] Deryk Osthus, Hans Jürgen Prömel, and Anusch Taraz. Almost all graphs with high girth and suitable density have high chromatic number. *J. Graph Theory*, 37(4):220–226, August 2001.
- [Ore55] Oystein Ore. Graphs and matching theorems. *Duke Math. J.*, 22:625–639, 1955.
- [PL86] D. Plummer and L. Lovász. *Matching Theory*. North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science, 1986.
- [Ric46] M. Richardson. On weakly ordered systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:113–116, 1946.
- [Tho80] C. Thomassen. *Kuratowski’s Theorem*. Preprint series: Matematisk Institut. Matematisk Inst., Univ., 1980.
- [Tho81] Carsten Thomassen. Kuratowski’s theorem. *Journal of Graph Theory*, 5:225–241, 1981.
- [Tho88] Andrew Thomason. An upper bound for some Ramsey numbers. *J. Graph Theory*, 12(4):509–517, 1988.
- [TT81] C. Thomassen and B. Toft. Non-separating induced cycles in graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 31(2):199–224, October 1981.
- [Wes] Douglas B. West. Ore, Berge–Tutte, and Gallai–Edmonds.
- [Wes11] Douglas B. West. A short proof of the Berge–Tutte Formula and the Gallai–Edmonds Structure Theorem. *European Journal of Combinatorics*, 32(5):674–676, 2011.