

5 COLORAÇÃO

5.1 COLORAÇÃO DE VÉRTICES

Resumo

Demonstramos resultados sobre de coloração de vértices (teoremas 5.4 e 5.6), grafos perfeitos (5.10 e 5.14) e lista-colorações (5.9 e ??). Resultados importantes mencionados são 5.3 e 5.13.

Uma **coloração** de um grafo $G = (V, E)$ é uma partição de V , isto é, uma família de subconjuntos de V disjuntos $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$, cuja união é V . Os conjuntos da partição são chamados de **classes de cor**, ou simplesmente **cores**. Dizemos que uma coloração é **própria** se toda aresta de G conecta vértices em conjuntos distintos da partição. Grafos que possuem coloração própria com k cores são ditos k -coloríveis. O **número cromático** de G , denotado $\chi(G)$, é o menor número de conjuntos que forma uma coloração própria de G . Quando o grafo subentendido estiver claro, escrevemos apenas χ para indicar seu número cromático. Em geral, o problema de encontrar uma coloração de um grafo G com $\chi(G)$ cores é NP-difícil.

É possível construir uma coloração própria de G usando um algoritmo guloso. Considere os vértices de G em uma ordem arbitrária $(v_1, v_2, \dots)$; fixe a cor de v_1 , digamos $v_1 \in C_1$; e “coloque” $v_i \in C_{f(i)}$, onde

$$f(i) = \min_{1 \leq j \leq i} \{j : N(v_i) \cap C_j = \emptyset\}.$$

Como esse algoritmo sempre obtém uma coloração própria de G , é fácil ver que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. E essa delimitação é justa, no caso geral: existem grafos que apresentam $\chi = \Delta + 1$. Uma prova do seguinte teorema se apoia em uma estratégia análoga à da delimitação via algoritmo guloso.

Proposição 5.1 Todo grafo G satisfaz $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) : H \subseteq G\}$.

Demonstração. Seja $k = \max_{H \subseteq G} \delta(H)$ e $n = |V(G)|$, e seja x_n um vértice de G que tem grau no máximo k . Considere $G_{n-1} = G - x_n$. Por hipótese, G_{n-1} tem um vértice, digamos x_{n-1} , de grau no máximo k . Defina

$$G_{n-2} = G_{n-1} - x_{n-1} = G - \{x_n, x_{n-1}\}.$$

Continuando este procedimento, enumeramos todos os vértices de G de x_n até x_1 . Claramente, a sequência $x_1, x_2, \dots, x_n$ é tal que x_j é adjacente a no máximo k vértices que o precedem, para $1 \leq j \leq n$. Portanto, usando o algoritmo guloso (“greedy”) descrito acima, podemos colorir G com no máximo $k + 1$ cores. $\square$

Corolário 5.2 Todo grafo G tem um subgrafo H tal que $\delta(H) \geq \chi(G) - 1$.

O corolário 5.2 implica que grafos com χ alto têm Δ alto. Obtemos outro limitante observando que em toda coloração com χ cores existe ao menos uma aresta entre cada par de conjuntos da partição. Portanto, para um grafo com m arestas,

$$\binom{\chi}{2} \leq m, \quad \text{o que implica} \quad \chi \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

Neste capítulo abordamos algumas classes de grafos para os quais limitantes muito mais precisos são conhecidos. Talvez o resultado mais conhecido de coloração, válido para grafos planares (capítulo 4), seja o teorema das 4 cores [AH89], cuja prova omitimos.

Teorema 5.3 (Teorema das 4 cores, Appel, Haken, 1976). Todo grafo planar é 4-colorível.

Circuitos ímpares e grafos completos são exemplos de grafos para os quais $\chi = \Delta + 1$. O teorema a seguir fornece um limitante melhor para os demais grafos.

Teorema 5.4 (Teorema de Brooks, 1941). Se G é um grafo conexo que não é completo e nem um circuito ímpar, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Um subgrafo H de um grafo G é dito **subgrafo gerador** de G se ele possui o mesmo conjunto de vértices que G (isto é, temos $V(G) = V(H)$).

A demonstração do teorema 5.4 abaixo usa árvores de busca em profundidade, ou **árvores BP**. Para construir a árvore de busca em profundidade $BP_G(r)$, que possui raiz $r \in V(G)$, especificamos o “ancestral” $a(v) \in N(v)$ de cada um dos demais vértices $v \in V(G) - r$ em uma certa ordem; A árvore não é única.

A busca em profundidade a partir de $r \in V(G)$ (*i.e.*, enraizada em r , é construída do seguinte modo. Defina $r = a(r)$. Selecione, arbitrariamente, um vizinho s de r tal que $a(s)$ ainda não tenha sido definido, e defina $a(s) = r$. Repita o procedimento partir de s (*i.e.*, tome um vizinho w de s sem ancestral, defina $a(w) = s$, e prossiga por $w \dots$). Quando todos os vizinhos de um vértice $t \neq r$ atingido pela busca tiverem ancestral definido, a busca procede por $a(t)$. O procedimento termina se $t = r$ e todos os vizinhos de r têm ancestral definido. A árvore BP de G é o grafo $BP_G(r) \subseteq G$ induzido pelas arestas $\{x, a(x)\}$

$$BP_G(r) = G \left[\{ \{x, a(x)\} : x \in V(G) - r \} \right].$$

Note que, em uma árvore BP de raiz r , todo vizinho de uma folha f está contido no caminho entre f e r .

Exercício 5.1. Para quais grafos G e vértice $r \in V(G)$, a árvore $BP_G(r)$ é única?

Exercício 5.2. Seja G um grafo que possui um caminho hamiltoniano. Mostre que se os vértices extremos de todo caminho hamiltoniano em G são adjacentes, então $G \simeq C_n$, ou $G \simeq K_n$ ou $G \simeq K_{n,n}$ (veja [Fle14]).

Exercício 5.3. Mostre que se G é um grafo simples, finito e conexo, e qualquer árvore BP de G enraizada em v é um caminho com extremo em v , então $G \simeq C_n$, ou $G \simeq K_n$ ou $G \simeq K_{n,n}$ (veja [Fle14]).

Lema 5.5 (Lema da Busca em Profundidade). Os únicos grafos para os quais *toda* árvore BP (árvore de busca em profundidade) é um caminho hamiltoniano são os circuitos, os grafos completos e os grafos completos bipartidos regulares $K_{n,n}$.

Exercício 5.4. Prove o Lema 5.5.

Duas curtas demonstrações do teorema de Brooks podem ser encontradas em [Lov75, Fle14].

5.2 GRAFOS k -CONSTRUTÍVEIS

Existe um procedimento simples para construir todos os grafos com número cromático maior ou igual a k , que detalhamos a seguir. Para isso precisamos definir uma operação sobre grafos.

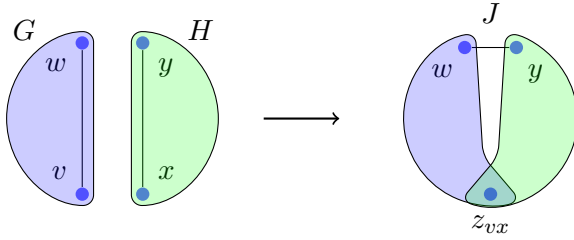
Sejam G e H dois grafos simples ($V(G) \cap V(H) = \emptyset$), vw uma aresta de G , e xy uma aresta de H . A **operação de Hajós** sobre G e H produz o grafo $J = (V, E)$, identificando os vértices v e x , e substituindo as arestas $\{xy, wv\}$ por wy (veja figura 5.1).

Formalmente, seja z_{vx} o vértice correspondente à identificação de v e x ($z_{vx} \notin V(G) \cup V(H)$): temos $V = V(G) \cup V(H) + z_{vx} - v - x$ e

$$\begin{aligned} E = & \{ab : a, b \in V(G) \cup V(H) \setminus \{v, w, x, y\}\} \\ & \cup \{z_{vx}u : u \in N(v) \cup N(x) \setminus \{w, y\}\} \cup \{wy\}, \end{aligned}$$

onde $N(v)$ e $N(x)$ denotam, respectivamente, a vizinhança de v em G , e a vizinhança de x em H .

Figura 5.1: Operação de Hajós: obtém grafo J a partir de G e H , com uma aresta cada, escolha arestas $vw \in E(G)$ e $xy \in E(H)$; identifique vértices $v \in V(G)$ e $x \in V(H)$; e troque arestas $\{vw, xy\}$ por wy .



Definimos, para todo natural $k \in \mathbb{N}$, a classe $\mathcal{C}_k$ dos grafos k -**construtíveis**, segundo as regras a seguir.

- i) o grafo completo K_k é k -construtível;
- ii) a aplicação da operação de Hajós a dois grafos k -construtíveis resulta em um grafo k -construtível; e
- iii) a identificação de vértices independentes de um grafo k -construtível produz um grafo k -construtível (isto é, se $G \in \mathcal{C}_k$ e $x, y \in V(G)$ são não-adjacentes, então $(G + xy)/xy \in \mathcal{C}_k$).

É fácil ver que todo grafo $G \in \mathcal{C}_k$ tem número cromático $\chi(G) \geq k$ (exercício 5.5). Por outro lado, esses grafos estão presentes em todo grafo com número cromático $\chi \geq k$, pelo seguinte teorema.

Teorema 5.6 (Hajós, 1961). Seja G um grafo e $k \in \mathbb{N}$. Então $\chi(G) \geq k$ se e somente se G contém um subgrafo H tal que $H \in \mathcal{C}_k$.

Dizemos que um grafo G é k -**crítico** se todo subgrafo próprio H de G satisfaz $\chi(H) < \chi(G)$. Note que o Teorema 5.6 é equivalente a afirmar que “todo grafo k -crítico é k -construtível”.

A demonstração a seguir pode ser lida em Diestel [Die05].

Demonstração. A demonstração segue por contradição: partimos de um contra-exemplo, e chegamos a um absurdo. Seja G um grafo tal que $\chi(G) \geq k$, que não é k -construtível, e que é aresta-maximal (isto é, ligando quaisquer vértices desconectados de G obtemos um grafo k -construtível). Podemos supor $k \geq 3$, pois caso contrário G atende o teorema.

Note também que G não é r -partido completo para algum $r \in \mathbb{N}$, caso contrário $\chi(G) = r$ e $K_r \subseteq G$.

Como $\chi(G) > 2$, o grafo contém ao menos uma aresta, e como G não é r -partido completo, a relação de não-vizinhança não é transitiva: isto é, existem vértices x, y_1 , e y_2 tais que $xy_1, xy_2 \notin E(G)$, e $y_1y_2 \in E(G)$.

Como G é aresta-maximal sem subgrafo k construtível, cada xy_i está em algum subgrafo k -construtível H_i de $G + xy_i$, para $i = 1, 2$.

Note que $H_1 \cap H_2$ contém x e possivelmente outros vértices e arestas de $G + xy_1 + xy_2$.

Seja H'_2 uma cópia isomorfa de H_2 que contém x e $H_2 - H_1$, e que é disjunta de G em seus demais vértices e arestas, e considere uma bijeção $v \mapsto v'$ que leva os vértices de H_2 a vértices de H'_2 , e que fixa os vértices em $H_2 \cap H'_2$ (isto é $v \mapsto v$ se $v \in V(H_2 \cap H'_2)$). Note que $H_1 \cap H'_2 = \{x\}$, então

$$H = (H_1 \cup H'_2) - xy_1 - xy'_2 + y_1y'_2$$

é k -construtível por ii.

Um vértice por vez, identificamos em H cada $v' \in H'_2 - G$ com seu parceiro v ; como vv' nunca é uma aresta de H , cada uma dessas identificações é um passo do tipo iii. Prosseguindo assim, obteremos em algum ponto o grafo

$$(H_1 \cup H_2) - xy_1 - xy_2 + y_1y_2 \subseteq G,$$

que é um grafo k -construtível de G , uma contradição. $\square$

Ao contrário do que se poderia esperar, um grafo com χ alto não necessariamente contém um grafo completo. Erdős demonstrou (teorema 5.10)

que existem grafos com número cromático $\chi(G)$ arbitrariamente alto e cintura $\text{Cintura}(G)$ arbitrariamente grande.

Dado um grafo G , definimos sua **cintura** $\text{Cintura}(G)$ (**girth**) como o comprimento de um menor circuito em G (caso G não possua circuitos, dizemos que sua cintura é infinita).

Uma **coloração justa** é uma coloração própria em que o número de vértices em classes de cor difere em até 1. Em 1964, Erdős conjecturou que todo grafo G possui uma coloração justa com até $\Delta(G) + 1$ cores. Essa conjectura foi demonstrada por Hajnal e Szemerédi [HS70] em 1970.

Exercício 5.5. Mostre que todo grafo $G \in \mathcal{C}_k$ possui número cromático $\chi(G) \geq k$.

Exercício 5.6. Mostre que o limitante da Proposição 5.1 é ao menos tão bom quanto o do teorema 5.6

Exercício 5.7. Dizemos que um mapa plano é **cartográfico** se é 2-conexo e 3-regular. Prove que todo mapa cartográfico possui uma face (país) com até 5 arestas.

Exercício 5.8. Mostre que podemos colorir as faces de um mapa cartográfico com até 6 cores.

Exercício 5.9. Para cada item, apresente um contra-exemplo ou uma demonstração. (Claro, não faz sentido usar o teorema 5.3.)

1. todo grafo planar é 6-colorível (fácil)
2. todo grafo planar é 5-colorível (médio)
3. todo grafo planar é 3-colorível (fácil)

5.3 LISTA-COLORAÇÃO

Seja $G = (V, E)$ um grafo e L uma função que atribui a cada vértice $v \in V$ um conjunto $L(v)$ de inteiros positivos, chamada **lista de v**

$$L = (L(v))_{v \in V}.$$

Uma coloração $C : V \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $c(v) \in L(v)$ para todo $v \in V$ é chamada uma **lista-coloração de G com respeito a L** , ou uma **L -coloração**. Neste caso, dizemos que G é **L -colorível**.

Note que, se $L(v) = \{1, 2, \dots, k\}$ para todo $v \in V$, então uma L -coloração é simplesmente uma k -coloração. Se $|L(v)| = 1$, estamos pré-colorindo v com a cor em $L(v)$.

Um grafo G é **k -lista-colorível** (ou **k -choosable**) se possui uma L -coloração, para *toda* lista-coloração $L = (L(v))_{v \in V}$ tal que a lista de qualquer vértice $v \in V$ tem $|L(v)| = k$ elementos,

O **menor k** tal que G é k -lista-colorível é o **número-lista-cromático de G** , $\chi_L(G)$ (ou $ch(G)$) (“list chromatic number” / “choice number”).

Eis alguns limitantes para $\chi(G)$ que são válidos para $\chi_L(G)$

- é limitado uma função do grau mínimo em um subgrafo: $\chi_L(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) : H \subseteq G\}$;
- se G não é nem um circuito nem um grafo completo, então $\chi_L(G) \leq \Delta(G)$; e
- é limitado (inferiormente) pelo número cromático: $\chi(G) \leq \chi_L(G)$.

Definição 5.7 Um grafo plano G com pelo menos 3 vértices é um **disco triangulado** se todas as faces internas de G são triangulares e sua face externa tem como fronteira um circuito.

Lema 5.8 Seja $G = (V, E)$ um disco triangulado e seja $C = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ o circuito que é a fronteira de sua face externa. Seja $L = (L(v))_{v \in V}$ tal que

- $L(v_1) = \{1\}, L(v_2) = \{2\}$;
- $|L(v)| \geq 3 \quad \forall v \in V(C), v \neq v_1, v \neq v_2$;
- $|L(v)| \geq 5 \quad \forall v \in V \setminus V(C)$.

Então G admite uma L -coloração.

Demonstração. (em aula) □

Teorema 5.9 (Thomassen, 1994). Se G é planar então $\chi_L(G) \leq 5$.

Lista-aresta-coloração

Analogamente ao caso de lista-coloração de vértices, temos o conceito de lista-aresta-coloração. Neste caso, é dada uma lista de cores associada a cada uma das arestas de um grafo G , digamos $L = L(e)_{e \in E(G)}$, e deseja-se obter uma aresta-coloração de G tal que a cada aresta seja atribuída uma das cores de sua lista. A notação e os conceitos para este caso são análogos.

Denota-se por $\chi'_L(G)$ ou $ch'(G)$ o **índice lista-aresta-cromático** de G (também chamado de **choosability** de G).

Lembramos que $\chi'(G)$ denota o índice cromático de G . Conjectura-se que $\chi'_L(G) = \chi'(G)$ para todo grafo G . Sabe-se que ela é verdadeira para o caso de grafos bipartidos. A seguir, veremos essa prova

Definição 5.10 Se u e v são vértices de um digrafo D , dizemos que u **domina** (**enxerga**) v se $uv \in A(D)$.

Definição 5.11 Um **núcleo** (**kernel**) de um digrafo D é um conjunto independente S de D tal que todo vértice em $V \setminus S$ domina algum vértice de S .

Note, em particular, que circuitos ímpares orientados ($\vec{C}_n$) não possuem núcleo.

Observação 5.12 Decidir se um digrafo tem um núcleo é um problema NP-completo.

Mencionamos dois teoremas, cuja prova não veremos.

Teorema 5.13 Se D não tem circuito ímpar, então não tem kernel.

Teorema 5.14 (Richardson, 1946 [Ric46]). Se D não tem circuito orientado ímpar, então possui um núcleo.

Exercício 5.10. Prove o segundo teorema, por indução no número de componentes fortes do grafo.

Lema 5.15 Seja $D = (V, A)$ um digrafo tal que todo subgrafo induzido de D tem um núcleo, e seja $L = (L_v)_{v \in V}$ tal que L_v é um conjunto de cores. Se $|L_v| > d^+(v)$ para todo $v \in V$, então D tem uma L -lista-coloração.

Demonstração. Por indução em $|V|$. Seja α uma cor que ocorre em algumas listas, mas que não ocorre em todas. Seja $V_\alpha = \{v \in V : \alpha \in L_v\}$. Seja $D' = D[V_\alpha]$. Pela hipótese, temos que D' tem um núcleo, digamos, S . Seja $\hat{L} = (\hat{L}_v)_{v \in V}$, onde $\hat{L}_v = L_v \setminus \{\alpha\}$. Seja $\hat{D} = D - S$. Como $d_{\hat{D}}^+(v) < |\hat{L}_v|$, para todo $v \in \hat{D}$, pela hipótese de indução, $\hat{D}$ tem uma $\hat{L}$ -lista-coloração. Esta $\hat{L}$ -lista-coloração de $\hat{D}$, juntamente com a atribuição da cor α aos vértices de S é uma L -lista-coloração de D . $\square$

Teorema 5.16 (Galvin, 1995). Se G é um grafo bipartido então $\chi'_L(G) = \chi'(G)$.

Demonstração. Seja G um grafo (X, Y) -bipartido. dizemos que duas arestas de **encontram** em X (resp. Y) se elas têm extremo comum em X .

Seja $k = \chi'(G)$ e $C : E(G) \mapsto \{1, \dots, k\}$ uma k -aresta-coloração de G . Como $\chi'_L(G) \geq k$, é suficiente provar que $\chi'_L(G) \leq k$. Para isso, vamos considerar um digrafo D e usar o Lema ??.

Seja H o **grafo-aresta** (**line-graph**) de G , e D uma orientação de H assim definida:

$$\begin{aligned} A(D) &= \{ee' : e, e' \text{ se encontram em } X \text{ e } C(e') > C(e)\} \\ &\cup \{ee' : e, e' \text{ se encontram em } Y \text{ e } C(e) > C(e')\}. \end{aligned}$$

Seja $e \in V(D)$, e suponha que $C(e) = i$. Note que $d_D^+(e) < k$ (de um lado da partição, cores maiores do que i , e, de outro, cores menores).

Para usar o lema ??, precisamos mostrar que todo subgrafo induzido D' de D tem um núcleo. Provamos isso por indução em $V(D')$.

Se $V(D) = \emptyset$, o resultado segue.

Seja $E' = V(D') \subseteq E$. Para cada $x \in X$, sejam $\delta'(x) = \delta(x) \cap E'$ o conjunto de arestas incidentes a x FALTA COISA AQUI!

Para cada $x \in X$ tal que $\delta'(x) \neq \emptyset$, seja e_x a aresta com a menor C -cor. Seja $U = \{e_x : \delta'(x) \neq \emptyset\}$.

Então toda aresta $e' \in E' \setminus U$ encontra algum $e \in U$ em x , e, portanto, existe o arco $e'e$.

Assim, se U é independente, ele é núcleo de D' , e a prova está completa (usando o lema ??). Se U não é independente, então existem $e, e' \in U$ adjacentes. Suponha $C(e) < C(e')$, então e, e' se encontram em Y , e temos que $ee' \in A(D')$.

Pela hipótese de indução, $D' - e$ tem um núcleo, digamos U' .

- Se $e' \in U'$, então U é um núcleo de D' .
- Se $e' \notin U'$, então existe $e'' \in U$ tal que $e'e'' \in A(D')$.
 - Se e', e'' se encontram em X , então $C(e') > C(e'')$ pela definição de D , contrariando o fato de $e' \in U$.
 - Se e', e'' se encontram em Y , então $C(e') < C(e'')$. Como e, e' se encontram em Y , temos que $C(e) < C(e')$. Logo $C(e) < C(e') < C(e'')$.

Portanto, $e'e'' \in A(D)$ e U também é um núcleo de D' . □

Observação 5.17 Existe uma prova para uma versão assintótica da conjectura.

5.4 GRAFOS PERFEITOS

Seja $\omega(G)$ = cardinalidade de uma clique máxima em G . Claramente $\chi(G) \geq \omega(G)$. Mas esse limitante não é justo, pois há grafos G que apresentam $\chi(G) \gg \omega(G)$. A existência de tais grafos foi provada por Erdős em 1959, usando argumentos probabilísticos.

Teorema 5.18 (Erdős, 1959). Dados $k, \ell \in \mathbb{N}$, existe um grafo G tal que $\chi(G) > k$ e $Cintura(G) > \ell$.

A prova a seguir usa a desigualdade de Markov, que fornece um limitante para a probabilidade de uma variável aleatória não-negativa X assumir valores grandes relativamente ao seu valor esperado $\mathbf{E}[X]$. Lembremos que o **valor esperado**, ou **esperança** de uma variável aleatória X , que assume valores em $\mathcal{X}$, é uma média dos valores $x \in \mathcal{X}$ ponderada pela probabilidade $\mathbf{P}[X = x]$ dos eventos “ X assume o valor x ”. Em símbolos,

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \mathbf{P}[X = x].$$

Lema 5.19 (Desigualdade de Markov). Seja X uma variável aleatória não-negativa e $t > 0$. Temos

$$\mathbf{P}[X \geq t] \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{t}.$$

Demonstração.

$$\mathbf{E}[X] = \sum_a a \mathbf{P}[X = a] \geq \sum_{a \geq t} t \mathbf{P}[X = a] = t \mathbf{P}[X \geq t]. \quad \square$$

Demonstração do Teorema 5.10. Considere um grafo G , com n vértices, construído pelo seguinte procedimento aleatório: para cada par de vértices, a aresta que os une está presente em G com probabilidade p . Fixamos um valor $\lambda \in (0, 1/\ell)$ e tomamos $p = n^{\lambda-1}$. Seja X o número de circuitos de comprimento menor ou igual a ℓ em G . Podemos expressar X como $\sum_{j=3}^{\ell} X_j$, onde X_j denota o número de circuitos de comprimento j em G . O número potencial de circuitos de comprimento j é inferior a n^j , e cada um desses circuitos está presente com probabilidade p^j .

Assim, a esperança de X que é igual a $\sum_{j=3}^{\ell} \mathbf{E}[X_j]$ é

$$\mathbf{E}[X] \leq \sum_{j=3}^{\ell} n^j p^j = \sum_{j=3}^{\ell} n^{\lambda j} \leq \frac{n^{\lambda \ell}}{1 - n^{-\lambda}}.$$

Como $\lambda \ell < 1$, a esperança é menor do que $n/4$ para n suficientemente grande. Pela desigualdade de Markov, temos $\mathbf{P}[X \geq n/2] < 1/2$. Note que ainda é possível que haja circuitos de comprimento menor do que ℓ em G (que chamaremos de circuitos curtos).

Consideramos agora o número cromático de G . Faremos isso por meio do número de independência $\alpha(G)$, isto é, o tamanho do maior conjunto independente em G . Como toda classe de cor forma um conjunto independente, temos que $\chi(G) \geq |V(G)|/\alpha(G)$. Tomamos $a = \lceil 3p^{-1} \ln n \rceil$ e consideramos o evento representando o evento “existe um conjunto independente de tamanho a em G ”. Como a probabilidade da união de eventos é limitada pela soma da probabilidade dos eventos (desigualdade da união), temos

$$\mathbf{P}[\alpha(G) \geq a] \leq \binom{n}{a} (1-p)^{\binom{a}{2}} \leq n^a e^{-pa(a-1)/2} \leq n^a n^{-3(a-1)/2} \rightarrow 0.$$

Para n suficientemente grande, esta probabilidade é menor do que $1/2$. Assim, mais uma vez pela desigualdade da união, temos

$$\mathbf{P}[X \geq n/2 \text{ ou } \alpha(G) \geq a] < 1.$$

Logo, existe um grafo G (com n vértices) em que o número de circuitos curtos é menor do que $n/2$ e cujo número de independência é menor do que a . Isso implica que podemos remover um vértice (arbitrário) de cada circuito curto, obtendo um grafo G' com ao menos $n/2$ vértices.

Ademais, G' não possui circuito de comprimento menor ou igual a ℓ , ou seja, G' tem cintura maior do que ℓ , e $\alpha(G') < a$. Logo,

$$\chi(G') \geq \frac{|V(G')|}{\alpha(G')} \geq \frac{n/2}{3n^{1-\lambda} \ln n} = \frac{n^{\lambda}}{6 \ln n}.$$

Assim, se garantirmos que $\frac{n^{\lambda}}{6 \ln n} > k$, temos o resultado desejado. Claramente, para n suficientemente grande essa desigualdade é satisfeita. Com isso, concluímos a prova do teorema. $\square$

Corolário 5.20 Seja H um grafo, que não é uma floresta. Para todo $k \in \mathbb{N}$, existem grafos G com $\chi(G) \geq k$ tais que $H \not\subseteq G$.

Um resultado (assintótico) mais recente nessa direção foi apresentado por Osthus, Prömel and Taraz [OPT01]. Fixados $\ell \geq 3$ e $k \in \mathbb{N}$, existem constantes C_1 e C_2 tais que quase todo grafo com n vértices, m arestas e cintura maior ou igual a ℓ possui número cromático maior ou igual a k , dado que $C_1 n \leq m \leq C_2 n^{\ell/(\ell-1)}$. (A expressão “quase todo” aqui é usada para dizer que a fração dos grafos com n vértices e m arestas para os quais vale a propriedade tende a 1 quando n tende a infinito.)

Grafos com *cintura* (*girth*) grande “parecem árvores” localmente, e não parecem ter uma estrutura local que os obrigue a ter número cromático alto. Esses grafos comprovam que número cromático alto pode ocorrer por razões de “natureza global” e não “local”. O interesse por grafos onde essa dependência global não ocorre, isto é, grafos cujo número cromático alto é apenas por causa de alguma razão local (por exemplo, existência de uma clique grande) ocupa assim o outro extremo no estudo da relação entre $\chi(G)$ e $\omega(G)$.

Uma pergunta natural é se existem grafos não-completos G com número cromático $\chi(G) = \omega(G)$, e a resposta é afirmativa. Um exemplo é o grafo $G = (V, E)$, com $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e arestas $E = \{12, 23, 34, 45, 56, 13\}$. Outro exemplo é o circuito C_4 com

quatro vértices. A parte sua existência, não se são conhecidas muitas propriedades desses grafos. Em 1960, Claude Berge introduziu uma outra classe relacionada, porém com mais estrutura e mais interessante. Trata-se da classe dos *grafos perfeitos*. Dizemos que um grafo G é **perfeito** se cada um de seus subgrafos induzidos H satisfaz $\chi(H) = \omega(H)$. Os grafos perfeitos constituem uma classe onde a exigência $\chi(G) = \omega(G)$ é levada ao extremo: um grafo é dito **perfeito** se todo subgrafo $H \subseteq G$ satisfaz $\chi(H) = \omega(H)$. Ao contrário do que pode parecer, a classe dos grafos perfeitos é grande, e seu estudo envolve uma série de problemas interessantes. Em particular a *Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos* (CFGP), de Berge, permaneceu em aberto por 40 anos. Ela foi demonstrada por Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas [CRST06]

Teorema 5.21 (Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas, 2006). Um grafo é perfeito se e somente se nem G nem $\overline{G}$ contém um circuito ímpar de comprimento maior ou igual a 5 como subgrafo induzido.

Um importante resultado, anterior à prova dessa conjectura, é o Teorema fraco dos grafos perfeitos (Teorema 5.14), provado por Lovász em 1972, conhecido como o Teorema dos Grafos Perfeitos, cuja prova exibimos nestas notas.

Teorema 5.22 (Lovász, 1972). Um grafo G é perfeito se e somente se $\overline{G}$ é perfeito.

Dado um vértice v de um grafo G e um grafo H , definimos o grafo da substituição de v por H (em G) como o grafo G' tal que $V(G') = V(H) \cup V(G - v)$ e $E(G') = E(H) \cup \{xy : x \in V(H), y \in N_G(v)\} \cup E(G - v)$ (assumindo que $V(G) \cap V(H) = \emptyset$).

Teorema 5.23 Se G é perfeito, substituindo-se um vértice de G por um grafo perfeito obtém-se um grafo perfeito.

Demonstração. Seja x um vértice qualquer de G e H um grafo perfeito e G' o grafo que resulta da substituição de x por H . É suficiente mostrar

que $\chi(G') = \omega(G')$, já que para os subgrafos induzidos de G' que são construídos da mesma forma que G' o resultado segue analogamente. Faremos a prova por indução em $k = \omega(G')$. Suponha $k > 1$ (se $k = 1$ o resultado é óbvio).

É suficiente encontrar um conjunto independente I de G' que intercepta todos as cliques com k elementos. (note que podemos colorir esses vértices com a mesma cor e os vértices restantes com outras $k - 1$ cores, o que pode ser feito por hipótese, obtendo assim uma k -coloração de G' .)

Sejam $m = \omega(G)$, $l = \omega(H)$ e ainda p a cardinalidade máxima de um clique em G que contém x . Note que $k = \max\{m, l + p - 1\}$. Considere uma m -coloração de G e chame de X o conjunto dos vértices de G que possuem a mesma cor que x . Por fim, seja L o conjunto dos vértices independentes de H que intercepta toda clique de H com l elementos.

O conjunto $I = L \cup (X - \{x\})$ é independente em G' , e I intercepta toda clique de G' com k elementos. De fato, se K é uma clique com k elementos de G' que intercepta H , então K contém uma clique com l elementos de H . Em particular, isso implica que K contém um vértice de L . Por outro lado, se K não intercepta H , então K deve ser uma clique com m elementos de $G - x$, e assim K contém um vértice de $X - \{x\}$. $\square$

Demonstração do Teorema 5.14. Seja G um grafo perfeito. Para provar que $\overline{G}$ é perfeito é suficiente provar que $\overline{G}$ contém um conjunto independente cuja remoção destrói as cliques máximas de $\overline{G}$. Ou seja, é suficiente provar que existe clique K em G tal que

$$\alpha(G - K) < \alpha(G).$$

Suponha que isto não ocorra: Para toda clique K de G existe um conjunto independente máximo que é disjunto de K . Seja $K_1, K_2, \dots, K_r$ uma enumeração de todas as cliques de G . Para cada $i = 1, \dots, r$, denote por I_i um conjunto independente máximo que é disjunto de K_i . Para

cada vértice x de G , seja $\theta(x)$ o número de conjuntos independentes I_i que contêm x .

Seja G' o grafo obtido de G substituindo x por $K_{\theta(x)}$, para todo $x \in V(G)$. (Observamos que um grafo completo é um grafo perfeito, e portanto G' é perfeito.) Note que uma clique máxima de G' vem de uma clique, digamos K_i , obtida de um *join* de $K_{\theta(x)}$ para cada $x \in V(K_i)$.

$$\omega(G') = \sum_{x \in V(K_i)} \theta(x) = \sum_{j=1}^r |I_j \cap K_i| \leq r - 1,$$

ou seja, temos $r \geq \omega(G') + 1$. Por outro lado,

$$|V(G')| = \sum_{x \in V(G)} \theta(x) = \sum_{i=1}^r |I_i| = r \cdot \alpha(G) \quad (5.1)$$

Como $\chi(G') \geq |V(G')|/\alpha(G')$, usando 5.1 e o fato de que $\alpha(G') = \alpha(G)$, temos que

$$\chi(G') \geq \frac{|V(G')|}{\alpha(G')} = \frac{|V(G')|}{\alpha(G)} = r \geq \omega(G') + 1,$$

isto é, $\chi(G') > \omega(G')$, uma contradição pois G' é perfeito. $\square$

Observação 5.24 Para todo grafo G , sabemos que

$$\chi(G) \geq \max \left\{ \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}, \omega(G) \right\}.$$

Se G é perfeito, então para todo subgrafo induzido $H \subseteq_{\text{ind}} G$ vale $\chi(H) \geq |V(H)|/\alpha(H)$. Como H é perfeito, temos $\omega(H) = \chi(H)$, e portanto $\omega(H) \geq |V(H)|/\alpha(H)$, ou seja,

$$|V(H)| \leq \alpha(H) \cdot \omega(H).$$

Assim, temos que G perfeito implica que para todo subgrafo induzido $H \subseteq_{\text{ind}} G$, vale $|V(H)| \leq \alpha(H)\omega(H)$. Hajnal & Simonovits conjecturaram que vale a recíproca da afirmação acima. Em 1972, Lovász provou esse fato.

Teorema 5.25 (Lovász, 72). Seja G um grafo. Se para todo subgrafo induzido $H \subseteq_{\text{ind}} G$ vale $|V(H)| \leq \alpha(H)\omega(H)$, então G é perfeito.

Note que o Teorema 5.14 segue como corolário do Teorema 5.17. De fato, suponha que G é perfeito. Tomando $\overline{H} \subseteq_{\text{ind}} \overline{G}$, temos que

$$|V(\overline{H})| = |V(H)| \leq \alpha(H)\omega(H) = \omega(\overline{H})\alpha(\overline{H}).$$

Portanto, $\overline{G}$ é perfeito.

5.5 CLASSES DE GRAFOS PERFEITOS

Teorema 5.26 Todo grafo bipartido é perfeito.

Lema 5.27 (Konig). G é bipartido sem vértices isolados $\Leftrightarrow \text{cob}_a(G) = \alpha(G)$.

(Imediato de T.G.P)

Onde $\text{cob}_a(G)$ é cobertura mínima por arestas.

$$\text{Emp}(G) = \text{cob}(G)$$

Definição 5.28 Seja G um grafo. Se H é um grafo, então dizemos que G é livre de H se G não contém H como *subgrafo induzido*.

Teorema 5.29 Se G é livre de P_4 , então G é perfeito. ($P_4 \equiv$ caminho com 4 vértices)

Exercício 5.11. Se G é livre de P_4 então, para todo $S \subseteq V(G)$ temos que $G[S]$ ou $\overline{G}[S]$ é desconexo.

Definição 5.30 G é um grafo **triangulado** (ou **cordal**) se todo circuito de G de comprimento maior que 3 tem uma *corda*, ou equivalentemente, se G não tem circuito induzido de comprimento maior ou igual a 4.

Definição 5.31 Um vértice v de um grafo G é **simplicial** se $G[\text{Adj}(v)]$ é uma *clique* de G .

Definição 5.32 G tem uma p.e.o. (perfect elimination ordering) se existe uma ordenação $v_n, \dots, v_1$ de seus vértices tal que cada v_i para $i = n, \dots, 2$ é um vértice simplicial de $G[v_i, \dots, v_1]$.

Teorema 5.33 Todo grafo cordal é perfeito.

Outra propriedade de grafos cordais (? entendi que era de grafos cordais) é que todo conjunto minimal separador é uma clique.

Definição 5.34 Uma orientação é **transitiva** se $xy, yz \in E(G) \Rightarrow xz \in E(G)$.

Definição 5.35 Um grafo G é um **grafo de comparabilidade** se G tem uma orientação que é transitiva.

Teorema 5.36 Todo grafo de comparabilidade é perfeito.

Definimos $m(x)$ como o comprimento do caminho mais longo com origem em x . E atribuímos para cada vértice a cor $m(x)$. Se dois vértices vizinhos receberam a mesma cor, então um aponta para o outro e é possível construir um caminho mais longo do que a cor que eles receberam. Cada caminho iniciando em x induz uma clique de tamanho $m(x) + 1$. Logo, temos que $\chi(G) = \max_{x \in V} \{m(x)\} + 1$.

Teorema 5.37

G é de intervalo $\Leftrightarrow G$ é cordal e $\overline{G}$ é de comparabilidade.

Com respeito a grafos que são cordais mas não são de intervalos, temos o grafo $G = (\{d, a, b, c, x, y, z\}, \{za, ad, yc, cd, xb, bd\})$. Uma subdivisão de uma estrela de 3 folhas.

Split graphs (grafos divididos)

Definição 5.38 G é um **grafo split** se existe uma bipartição de $V(G)$ em conjuntos A e B tal que $G[A]$ é uma *clique* e $G[B]$ é *independente*.

Teorema 5.39 Todo grafo split é perfeito.

É fácil notar que este grafo é perfeito, basta pegar A com o maior número possível de vértices. Obtemos que para todo vértice v de B existe pelo menos um vértice u em A que não é seu vizinho. Assim, dê para u a mesma cor de v . Logo, colorimos G com $|A|$ cores.

5.6 EXERCÍCIOS

Exercício 5.12. Mostre que se G é um grafo conexo com n vértices e m arestas, então $\chi(G) \geq n^2/(n^2 - 2m)$.

Exercício 5.13. Prove que $\chi(G) \leq \ell + 1$, onde ℓ é o comprimento de um caminho mais longo em G .

Exercício 5.14. Mostre que todo grafo bipartido planar é 3-lista-colorível. *Sugestão:* Use o lema ?? e o teorema de Richardson ??.

Exercício 5.15. Um **grafo de intervalos** G é um grafo cujos vértices correspondem a um conjunto de intervalos fechados na reta real, e tal que dois vértices de G são adjacentes se e somente seus intervalos correspondentes se intersectam. Prove que todo grafo de intervalos é perfeito.

Exercício 5.16. Seis professores visitaram a biblioteca num dia em que um livro raro foi roubado. Cada um entrou uma vez, ficou por um tempo, e depois saiu. Para cada dois deles que estiveram na biblioteca ao mesmo tempo, pelo menos um deles viu o outro. Detetives interrogaram os professores e colheram o seguinte testemunho:

Professor	Afirmou que viu	
Astuto (A)	Begônio (B),	Esmeraldo (E)
Begônio (B)	Astuto (A),	Fúcsio (F)
Cemolino (C)	Desdêmono (D),	Fúcsio (F)
Desdêmono (D)	Astuto (A),	Fúcsio (F)
Esmeraldo (E)	Begônio (B),	Cemolino (C)
Fúcsio (F)	Cemolino (C),	Esmeraldo (E)

Nesta situação, “mentir” significa dar uma informação falsa, mas não significa omitir uma informação. Suponha que *o culpado tentou colocar a culpa em outro mentindo*. Se um professor mentiu, quem foi?

Resolva usando conceitos da teoria dos grafos.

NOTAS DO CAPÍTULO 5

5.7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [AH89] K.I. Appel and W. Haken. *Every Planar Map Is Four Colorable*. Contemporary mathematics, v. 98. American Mathematical Society, 1989.
- [CRST06] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. The strong perfect graph theorem. *ANNALS OF MATHEMATICS*, 164:51–229, 2006.
- [Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.
- [Fle14] Tamás Fleiner. Yet another proof for brooks’ theorem. Technical Report QP-2014-01, Egerváry Reserch Group, Budapest, 2014. www.cs.elte.hu/egres.
- [HS70] A. Hajnal and E. Szemerédi. Proof of a conjecture of P. Erdős. In *Combinatorial theory and its applications, II (Proc.*

Colloq., Balatonfüred, 1969), pages 601–623. North-Holland, Amsterdam, 1970.

- [Lov75] L Lovász. Three short proofs in graph theory. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 19(3):269 – 271, 1975.
- [OPT01] Deryk Osthus, Hans Jürgen Prömel, and Anusch Taraz. Almost all graphs with high girth and suitable density have high chromatic number. *J. Graph Theory*, 37(4):220–226, August 2001.
- [Ric46] M. Richardson. On weakly ordered systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:113–116, 1946.