Corte Multiseparador Mínimo
(Notas de aula de MAC-5727)

Prof.ª Yoshiko Wakabayashi
{transcrito por Fabio A.C. Tisovec em agosto de 2006}

12 de março de 2008

Problema MinCMs (G, c, S): *Dados um grafo conexo $G = (V, E)$ com custo $c_e \in \mathbb{Q}_{\geq}$ para cada $e \in E$, e um conjunto $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subset V$, encontrar $C \subseteq E$, tal que $c(C)$ seja mínimo e C separa 2 a 2 todos os vértices de S.*

Num grafo $G = (V, E)$, dizemos que $C \subseteq E$ *separa* os vértices de um conjunto $S \subset V$ se em $G - C$ cada elemento de S pertence a um componente distinto (ou seja, em $G - C$ não existe nenhum caminho entre os vértices de S). Também dizemos que C é um *S-corte multiseparador* (*multiway cut*).

Dahlhaus, Johnson, Papadimitriou, Seymour e Yannakakis [2] mostraram que o MinCMs é NP-difícil para $k \geq 3$ (mesmo para grafos planares com custos unitários).

Esses autores também mostraram que MinCMs (G, c, S) é polinomial para k fixo (existe algoritmo com complexidade $O((4k)^k n^{2k-1} \log n)$). Note que no caso $k = 2$ temos o bem conhecido problema do corte de custo mínimo (que separa 2 vértices), que pode ser resolvido eficientemente com algoritmos para problemas de fluxo.

Dahlhaus *et al.* [2] provaram que existe uma $(2 - 2/k)$-aproximação polinomial para o MinCMs (caso geral). Veremos isso a seguir.

Algoritmo Guloso-MinCMs (G, c, S)

1 Para $i = 1, 2, \ldots, k$ faça:
2 $\quad C_i \leftarrow$ CorteMínimoSeparador (G, c, S, s_i)
3 Seja j tal que $c(C_j) = \max\{c(C_i), i = 1, \ldots, k\}$
4 Devolva $(\cup_{i=1}^{k} C_i) \setminus C_j$

No passo 2 o algoritmo CorteMínimoSeparador (G, c, S, s) devolve um conjunto de arestas C, tal que em $G - C$ não existe caminho de s a $S \setminus \{s\}$

(ou seja, C é um corte que separa s dos demais vértices de $S \setminus \{s\}$). Dahlhaus *et al.* [2] propõem a seguinte maneira para encontrar tal corte: construir um novo grafo G' a partir de G identificando-se todos os vértices em $S \setminus \{s\}$ num único vértice s', e encontrar em G' um corte de custo mínimo que separa s e s'.

Uma outra maneira para se resolver o passo 2 do algoritmo é obter um novo grafo acrescentando-se um novo vértice t e arestas wt para todo $w \in S \setminus \{s\}$, definir custo $c_{wt} = \infty$, e encontrar um corte de custo mínimo que separa s e t.

Podemos concluir imediatamente do passo 2 do algoritmo o seguinte resultado.

Lema 1: *O algoritmo* Guloso-MinCMs (G, c, S) *devolve um S-corte multiseparador.*

Teorema 2: *O algoritmo* Guloso-MinCMs (G, c, S) *é uma* $(2 - 2/k)$*-aproximação polinomial para o problema* MinCMs(G, c, S)*, onde* $k = |S|$.

Demonstração: Considere uma dada instancia (G, c, S) do MinCMs e seja C^* uma solução ótima para essa instância. Então $G - C^*$ tem exatamente k componentes, digamos $G_1, G_2, \ldots, G_k$.

Seja $G_i = (V_i, E_i)$, e suponha que $s_i \in V_i$. Então $\delta(V_i)$ é um corte que separa s_i de $S \setminus \{s_i\}$. Logo,

$$c(C_i) \leq c(\delta(V_i)), \text{ para todo } 1 \leq i \leq k.$$

E portanto,

$$\sum_{i=1}^{k} c(C_i) \leq \sum_{i=1}^{k} c(\delta(V_i)) \leq c(E^*). \tag{1}$$

Seja $C := (\cup_{i=1}^{k} C_i) \setminus C_j$ a solução devolvida pelo algoritmo. Claramente,

$$c(C_j) \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{c(C_i)}{k}. \tag{2}$$

Então, usando (2) e (1) nas desigualdades abaixo, temos que

$$
\begin{aligned}
c(C) &= \sum_{i=1}^{k} c(C_i) - c(C_j) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} c(C_i) - \sum_{i=1}^{k} \frac{c(C_i)}{k} \\
&= (1 - 1/k) \sum_{i=1}^{k} c(C_i) \\
&\leq (1 - 1/k)\, 2\, c(C^*) \\
&= (2 - 2/k)\, \mathrm{opt}(G, c, S).
\end{aligned}
$$

O algoritmo é claramente polinomial, pois o algoritmo usado no passo 2 pode ser executado em tempo polinomial.

□

Calinescu, Karloff e Rabani [1] obtiveram uma $(1/5 - 1/k)$-aproximação probabilística pra o MinCMs (G, c, S), e em seguida uma versão desaleatorizada com a mesma razão. A idéia consiste em formulá-lo como um programa linear e, usando arredondamento probabilístico, decidir quais vértices ficam no mesmo componente de s_i, para todo i.

Referências

[1] Gruia Calinescu, Howard J. Karloff, and Yuval Rabani. An improved approximation algorithm for multiway cut. In *ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 48–52, 1998.

[2] E. Dahlhaus, D. S. Johnson, C. H. Papadimitriou, P. D. Seymour, and M. Yannakakis. The complexity of multiway cuts (extended abstract). In *STOC '92: Proceedings of the twenty-fourth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 241–251, New York, NY, USA, 1992. ACM Press.