Prova.

Seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y) e seja $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ um circuito de G. Sem perda de generalidade, suponha que $v_1 \in X$. Então $v_2 \in Y$, $v_3 \in X$, e de modo geral, $v_i \in X$ se i é ímpar, e $v_i \in Y$ se i é par. Como $v_1 \in X$, então $v_k \in Y$, e portanto k é par, ou seja, C é um circuito par.

Vamos agora provar que se G é um grafo sem circuitos ímpares então G é bipartido. É suficiente considerar o caso em que G é conexo. Suponha então G conexo, escolha arbitrariamente um vértice w e defina os conjuntos:

$$X := \{v \in V(G) : \; d(v, w) \text{ é par}\};$$

$$Y := \{v \in V(G) : \; d(v, w) \text{ é ímpar}\}.$$

Vamos provar que (X, Y) é uma bipartição de G. Para isso, vamos tomar dois vértices quaisquer u e v em X e provar que esses vértices não são adjacentes.

Sejam

$$P \text{ um caminho mais curto de } w \text{ a } u,$$

$$Q \text{ um caminho mais curto de } w \text{ a } v.$$

Seja z o vértice comum a $V(P)$ e $V(Q)$ tal que, tanto em P quanto em Q, nenhum outro vértice que ocorre depois de z pertence a ambos os caminhos. [Pensar na prova dessa afirmação.]

Sejam

$$P_{wz} \text{ a seção de } P \text{ que vai de } w \text{ a } z, \; P_{zu} \text{ a seção de } P \text{ que vai de } z \text{ a } u,$$

$$Q_{wz} \text{ a seção de } Q \text{ que vai de } w \text{ a } z, \; Q_{zv} \text{ a seção de } Q \text{ que vai de } z \text{ a } v.$$

Pela escolha de P e Q segue que $\|P_{wz}\| = \|Q_{wz}\|$. E como P e Q têm comprimento par, concluimos que $\|P_{zu}\|$ e $\|Qzv\|$ têm a mesma paridade. Logo, $P_{zu}^{-1}Q_{zv}$ é um caminho par de u a v. Se u fosse adjacente a v então tal caminho juntamente com a aresta vu formaria um circuito ímpar em G, contrariando a hipótese. Logo, u e v não são adjacentes.

Analogamente, conclui-se que quaisquer dois vértices de Y não são adjacentes. Portanto, (X, Y) é uma bipartição de G, ou seja, G é bipartido. ■