Capítulo 3
Árvores e Florestas

Problema: Suponha que numa cidade haja n postos telefônicos. Para que seja sempre possível haver comunicação (não ncecessariamente direta) entre quaisquer desses postos, qual é o *número mínimo de linhas diretas* que deve existir?

Pergunta: Qual é o número mínimo de arestas que um grafo com n vértices deve ter para ser conexo?
Resposta:

Já vimos que:

Se G é um grafo conexo com n vértices então G tem pelo menos $n - 1$ arestas.
Ou seja, $|A(G)| \geq n - 1$ é **condição necessária** para que um grafo G com n vértices seja conexo.

Pergunta 1: $|A(G)| \geq n - 1$ é **condição suficiente** para garantir que um grafo G com n vértices seja conexo?
Resposta 1:

Pergunta 2: Existem grafos conexos com n vértices e $n - 1$ arestas (para todo $n \geq 1$)?
Resposta 2:

Desenhe todos os grafos conexos (não isomorfos) com n vértices e $n - 1$ arestas para $n = 1, 2, \ldots, 6$.

Observação:

Pergunta 3: É verdade que se G é um grafo conexo com n vértices e $n-1$ arestas então G não contém circuitos?
Resposta 3:

Proposição 3.1. *Se G é um grafo conexo com n vértices e $n-1$ arestas então G não contém circuitos.*

Prova. [na aula]

Pergunta 4: Vale a recíproca da Proposição 3.1?
Resposta 4:

Proposição 3.2. *Se G é um grafo conexo com n vértices e G não contém circuitos, então G tem $n-1$ arestas.*

Prova. [na aula]

Def. Dizemos que um grafo é **acíclico** se ele não contém circuitos.
Def. Uma **árvore** é um grafo acíclico conexo. Uma **floresta** é um grafo acíclico (não necessariamente conexo); ou seja, é um grafo cujos componentes são árvores.

Juntando as Proposições 3.1 e 3.2, e a definição acima, temos:

Teorema 3.3. *Um grafo conexo com n vértices é uma árvores se só se tem $n-1$ arestas.*

Corolário 3.4. *Toda árvore não trivial tem pelo menos 2 vértices de grau 1.*
Prova. [na aula]

Teorema 3.5. *As seguintes afirmações a respeito de um grafo G são equivalentes:*

(a) G é uma árvore.

(b) G não tem laços e entre quaisquer dois vértices de G existe um único caminho.

(c) G é acíclico e se u, v são dois vértices não-adjacentes de G, então $G + uv$ tem exatamente um circuito. (Isto é, G é um grafo acíclico maximal.)

(d) G é conexo e se e é uma aresta de G então $G - e$ é desconexo. (Em outras palavras, G é conexo e toda aresta de G é uma ponte.)

Prova. [na aula] (Escrever a prova numa folha complementar.)

<u>Exercício 18.</u> *Prove que se G é um grafo conexo com n vértices e n arestas, $n \geq 1$, então G contém um único circuito.*

<u>Exercício 19.</u> *Prove que se G é um grafo simples com pelo menos 5 vértices então ou G ou o seu complemento $\bar{G}$ contém um circuito.*

<u>Def.</u> Uma **árvore geradora** ('spanning tree') de um grafo G é um subgrafo gerador de G que é uma árvore. (Lembramos que um subgrafo T de G é gerador se $V(T) = V(G)$.)
Exemplos:

Corolário 3.6. *Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.*

Prova. [na aula]

Vértice-de-corte (ou vértice separador).

Num grafo G um vértice v é um **vértice-de-corte** se o conjunto das arestas de G pode ser particionado em dois subconjuntos não-vazios A_1 e A_2 tais que os subgrafos $G[A_1]$ e $G[A_2]$ têm apenas o vértice v em comum.

OBS: Se G é um grafo *sem laços* então a definição acima é equivalente a: v é um vértice-de-corte se $c(G - v) > c(G)$, isto é, o número de componentes de $G - v$ é maior do que o número de componentes de G.

Exemplos:

Def. Numa árvore um vértice de grau 1 é chamado **folha**.

Teorema 3.7. *Em uma árvore um vértice v é um vértice-de-corte se e só se $g(v) > 1$.*

Prova. [na aula]

Corolário 3.8. *Todo grafo conexo não-trivial, sem laços, tem pelo menos 2 vértices que não são vértices-de-corte.*

Prova. [na aula]

Corolário 3.9. *Todo grafo conexo não-trivial G tem um vértice v tal que $G - v$ é conexo.*

EXERCÍCIO 20. *Seja G um grafo. Prove que uma aresta α de G é uma aresta-de-corte se e só se α não está contida em nenhum circuito de G.*

EXERCÍCIO 21. *Seja G um grafo conexo e α uma aresta de G. Prove que α pertence a todas as árvores geradoras de G se e só se α é uma aresta-de-corte de G.*

Teorema 3.10. *O número de árvores geradoras (rotuladas) distintas de K_n, $n \geq 2$, é igual n^{n-2}.*

Prova. [Idéia a ser discutida em aula]

APLICAÇÕES

O PROBLEMA DA INTERLIGAÇÃO MÍNIMA

Deseja-se interligar (conectar) um certo número de locais através de uma rede de comunicação (fibra ótica). Sabendo-se que o custo para construir uma ligação direta de um local i para um local j é c_{ij}, deseja-se construir uma tal rede de forma que o custo total de construção seja o menor possível.

Considerando cada local i como sendo um vértice v_i de um grafo com custos c_{ij} associados às arestas $v_i v_j$, o problema acima pode ser formulado da seguinte maneira:

Dado um grafo $G = (V, A)$, com custo $c_a \geq 0$ associado a cada aresta $a \in A$, encontrar em G um subgrafo gerador conexo de custo mínimo.

É imediato que no problema acima estamos interessados em encontrar em G uma **árvore geradora de custo mínimo**. Uma tal árvore será chamada de **árvore ótima**. O custo de um grafo T, denotado por $c(T)$, é definido como a soma dos custos das arestas em T; isto é $c(T) := \sum_{a \in T} c_a$.

Exemplo:

ALGORITMO DE KRUSKAL

Entrada: Grafo conexo $G = (V, A)$, com custos c_a em cada aresta $a \in A$.
Saída: Árvore ótima T (árvore geradora de custo mínimo).

1. (Ordenação) Ordene as arestas de G em ordem não-decrescente de seus custos.
   Chame-as de $a_1, a_2, \ldots, a_m$, sendo $c(a_1) \leq c(a_2) \leq \ldots \leq c(a_m)$.
2. $B \leftarrow \emptyset$.
3. Para $i = 1$ até m faça
   se $G[B \cup \{a_i\}]$ é acíclico então $B \leftarrow B \cup \{a_i\}$.
4. $T \leftarrow G[B]$. Pare.

OBS: O passo 3 pode ser melhorado. Note que quando $|B| = |V| - 1$ não há mais necessidade de testar mais outras arestas.

O algoritmo acima é um *bom* algoritmo (muito eficiente). (Em aula: detalhes sobre a implementação e complexidade.)

Teorema 3.11. *Se T é um subgrafo construído pelo algoritmo de Kruskal, então T é uma árvore ótima de G.*
Prova. [na aula]