Capítulo 2

Grafos Eulerianos

O Problema das 7 pontes de Königsberg:

É possível achar um passeio que começa em uma das regiões de terra de Königsberg (regiões A, B, C, D na figura abaixo), passa por cada uma das 7 pontes exatamente uma vez e volta à região de origem?

Considere um grafo G cujos vértices representem as regiões de terra (A, B, C, D), e cujas arestas representem as pontes ligando as regiões correspondentes (veja figura acima). É imediato que o problema das 7 pontes de Königsberg se reduz ao problema de decidir se o grafo G acima tem uma *trilha fechada* que passa por todas as suas arestas. Leonhard Euler (1736) provou que um tal passeio não existe.

Uma trilha que passa por todas as arestas de um grafo é chamada uma **trilha de Euler**, ou **trilha euleriana**. Um grafo é **euleriano** se possui uma trilha euleriana fechada.

[Königsberg ficava na antiga Prússia (século dezoito). Foi rebatizada de Kaliningrado pelos soviéticos em 1946. Atualmente pertence à Rússia. O rio, era conhecido como Pregel, hoje chama-se Pregolya. Euler era professor de matemática em St. Petersburgo quando tomou conhecimento do problema. Provou também resultados mais gerais sobre problemas do mesmo tipo. Não chegou porém a provar a suficiência da condição mencionada no teorema a seguir, embora seja considerado como autor desse resultado. O artigo de Euler sobre o problema das 7 pontes e generalização desse problema, publicado em 1736 é considerado o primeiro artigo sobre teoria dos grafos. O termo *grafo* não é usado nesse artigo (em latim).]

Teorema 2.1. *Um grafo conexo é euleriano se e só se cada um de seus vértices tem grau par.*

Prova. [na aula]

Corolário 2.2. *Um grafo conexo tem uma trilha euleriana se e só se tem no máximo 2 vértices de grau ímpar.*

Prova. [na aula]

Corolário 2.3. *Seja G um grafo conexo com $2k \geq 2$ vértices de grau ímpar. Então G tem k trilhas (abertas) $T_1, T_2, \ldots, T_k$ duas a duas disjuntas nas arestas e tais que $A(T) = A(T_1) \cup A(T_2) \cup \ldots \cup A(T_k)$.*

Prova. [na aula]

<u>Exercício 14</u>. *Prove que um grafo é euleriano se e só se o seu conjunto das arestas de pode ser particionado em circuitos.*

Denotamos por $\mathbf{c(G)}$ o número de componentes de G. Dizemos que uma aresta α de G é uma **aresta-de-corte** ou **ponte** se $c(G - \alpha) > c(G)$ (isto é, sua remoção aumenta o número de componentes).

<u>Algoritmo de Fleury</u>

Entrada: Grafo G com no máximo dois vértices de grau ímpar.
Saída: Trilha euleriana em G.

(P_1) Se G possui vértices de grau ímpar, seja v_o um tal vértice; senão, seja v_o um vértice qualquer. Faça $T_o = (v_o)$.

(P_2) Tendo escolhido a trilha $T_k = (v_o, a_1, v_1, \ldots, a_k, v_k)$, faça $G_k := G - \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Escolha em G_k uma aresta a_{k+1} incidente a v_k, dando preferência a uma que não seja ponte (se tal aresta não existir, escolha uma ponte). Seja $a_{k+1} = \{v_k, v_{k+1}\}$ e $T_{k+1} := T_k(v_k, a_{k+1}, v_{k+1})$. Repita o passo P_2 enquanto isto for possível.

Teorema 2.4. *Seja G um grafo conexo com no máximo dois vértices de grau ímpar. Então o algoritmo de Fleury (acima definido) contrói uma trilha euleriana em G.*

Prova. [Sugestão: provar por indução em $|A(G)|$ (Exercício 15)]

<u>Exercício 15</u>. *Faça a prova do Teorema 2.4., por indução no número de arestas do grafo.*

<u>Exercício 16</u>. *Prove ou desprove: Existe um grafo conexo euleriano simples que tem um número par de vértices e um número ímpar de arestas.*

<u>Exercício 17</u>. *Prove ou desprove: Se G é um grafo euleriano com arestas α, β que têm um vértice comum, então G tem uma trilha euleriana na qual α e β aparecem consecutivamente.*