Capítulo 1
Conceitos e Resultados Básicos

Um **grafo** é um par ordenado (V, A), onde V e A são conjuntos disjuntos, e cada elemento de A corresponde a um par não-ordenado de elementos de V. Os elementos do conjunto V são chamados **vértices** e os elementos do conjunto A são chamados **arestas**. Quando uma aresta a corresponde a um par $\{u, v\}$ de vértices, denotamos isso escrevendo $a = \{u, v\}$. Também escrevemos simplesmente uv para nos referirmos a uma tal aresta, quando não há perigo de confusão.

Exemplo:

Se G é um grafo, então também denotamos o seu conjunto de vértices por $V(G)$, e o seu conjunto de arestas por $A(G)$. Assim, tendo o nome de um grafo, ainda que os nomes do seu conjunto de vértices e do seu conjunto de arestas nao sejam explicitados, podemos sempre nos referir a esses objetos.

• Adjacência e incidência de vértices e arestas

Se $\alpha = \{u, v\}$ é uma aresta de um grafo, dizemos que α **vai de** u **para** v, ou **liga** os vértices u e v, ou **incide em** u (e em v). Também dizemos que u e v são os **extremos** (ou as **pontas**) de α; que u e v são **adjacentes** (ou **vizinhos**), e que u é **adjacente** a v.

Arestas com um extremo em comum são chamadas **adjacentes**; arestas com os mesmos extremos são chamadas **paralelas** ou **múltiplas**. Uma aresta com extremos iguais é um **laço**.

Exemplo:

Muitas vezes, para simplificar a notação, uma aresta com extremos u e v é denotada por uv.

A **ordem** de um grafo $G = (V, A)$ é a cardinalidade de V; o seu **tamanho** é a soma $|V| + |A|$.

• Grau de vértices e de grafos

O **grau** de um vértice v, denotado por $g_G(v)$, é o número de arestas que incidem em v, onde os laços são contados duas vezes. Um vértice de grau zero é chamado **isolado**. Se o grafo a que estamos nos referindo é óbvio pelo contexto, o grau de um vértice v nesse grafo é denotado simplesmente por $\mathbf{g}(v)$.

O **grau mínimo** de um grafo G é o número $\delta(G) := \min\{g(v) : v \in V(G)\}$; e o **grau máximo** de G é o número $\Delta(G) := \max\{g(v) : v \in V(G)\}$.

Exemplo:

Da definição de grau de um vértice, segue imediatamente o seguinte resultado.

Proposição 1.1. *Para todo grafo G temos que $\sum_{v \in V(G)} g(v) = 2\ |(A(G)|$. Ou seja, a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de suas arestas.*

Corolário 1.2 *Todo grafo tem um número par de vértices de grau ímpar.*

Exercício 1. *Prove que se G é um grafo sem vértices isolados e $|A(G)| < |V(G)|$, então G tem pelo menos 2 vértices de grau 1.*

Exercício 2. *Seja G um grafo com pelo menos 2 vértices. Prove que se $|A(G)| \geq |V(G)|+1$ então G possui um vértice com grau pelo menos 3.*

• Isomorfismo de grafos

Sejam G e H dois grafos. Dizemos que G é **isomorfo** a H, e escrevemos $G \cong H$, se existe uma bijeção $\varphi : V(G) \to V(H)$ tal que $uv \in A(G) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in A(H)$ para todo $u, v \in V(G)$. A bijeção φ é chamada um **isomorfismo**; e se $G = H$ então é φ é chamada um **automorfismo**.

Exercício 3. *Mostre que os seguintes grafos são isomorfos.*

• Tipos especiais de grafos

Um grafo é **simples** se não tem laços e nem arestas múltiplas. É **finito** se seus conjuntos de vértices e arestas são finitos. Consideramos aqui apenas grafos finitos, devendo isso ficar sempre subentendido.

Um grafo G é **vazio** se $V(G) = A(G) = \emptyset$. Um grafo com apenas um vértice e nenhuma aresta é chamado **trivial**.

Um grafo **completo** é um grafo simples em que quaisquer dois de seus vértices distintos são adjacentes. A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo com n vértices; que é denotado por K_n. O grafo K_3 é também chamado de **triângulo**.

Exemplos:

Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y ($X \cup Y = V(G)$

e $X \cap Y = \emptyset$) de modo que cada aresta de G tenha um extremo em X e outro em Y. Uma tal partição é chamada uma **bipartição** do grafo.

Exemplos:

Um grafo **bipartido completo** é um grafo simples com bipartição (X, Y), no qual cada vértice de X é adjacente a cada vértice de Y. Se $|X| = m$ e $|Y| = n$ então um tal grafo é denotado por $K_{m,n}$.

Exemplos:

Um grafo é k-**regular** se todos os seus vértices têm grau k; G é **regular** se é k-regular para algum k.

Se G é um grafo simples, o **complemento** de G, denotado por $\bar{G}$ é um grafos simples com $V(\bar{G}) = V(G)$, sendo que dois vértices são adjacentes em $\bar{G}$ se e só se eles não são adjacentes em G.

Exemplos:

• Subgrafos

Um grafo H é um **subgrafo** de um grafo H se $V(H) \subseteq V(G)$ e $A(H) \subseteq A(G)$; escrevemos $H \subseteq G$. Neste caso, também dizemos que H **está contido** em G, ou que G **contém** H, ou que G é um **supergrafo** de H. Se $H \subseteq G$, mas $H \neq G$ então dizemos que H é um **subgrafo próprio** de G, e escrevemos $H \subset G$.

Dizemos que H é um subgrafo **gerador** (*spanning subgraph*) de G se $H \subseteq G$ e $V(H) = V(G)$.

Denotamos por $G - F$ o subgrafo de G obtido removendo-se as arestas em F.

Para simplificar, em vez de $G - \{a\}$ escrevemos $G - a$, onde a é um vértice ou uma aresta de G.

Problema: *Prove que numa festa com 6 pessoas sempre existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente, ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente.*

Considerando que, se x conhece y então y conhece x (isto é, a relação 'conhecer' é simétrica), na linguagem de grafos a afirmação a ser provada é a seguinte.

Proposição 1.3. *Se G é um grafo simples com 6 vértices, então ou G contém um triângulo, ou o seu complemento contém um triângulo.*

Exercício 4. *Considere um campeonato de xadrez onde cada dois jogadores disputam no máximo uma partida entre si. Prove que em qualquer etapa de um tal campeonato há sempre (pelo menos) dois jogadores que realizaram exatamente o mesmo número de partidas. Formule o problema na linguagem de grafos e resolva-o.*

• Passeios, trilhas, caminhos e circuitos

Um **passeio** em um grafo é uma seqüência finita não vazia $P = (v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, v_k)$, cujos termos são alternadamente vértices v_i e arestas a_j, e tal que, para todo i, $1 \leq i \leq k$, os extremos de a_i são v_{i-1} e v_i. Dizemos que P é um passeio **de** v_o **a** (**para**) v_k, e P **passa** pelos vértices v_i e pelas arestas a_j. Os vértices v_o e v_k são a **origem** e o **término** de P, respectivamente; e os vértices $v_1, \ldots, v_{k-1}$ são chamados **vértices internos** de P. O conjunto dos vértices e das arestas que definem P é denotado por $V(P)$ e $A(P)$, respectivamente.

O **comprimento** de P, denotado por $\|P\|$, é o número de arestas de P.

Uma **trilha** é um passeio sem arestas repetidas. Um **caminho** é um passeio sem vértices repetidos. Um passeio é **fechado** se tem comprimento não nulo e sua origem e seu término coincidem. Uma trilha fechada cuja origem e vértices internos são todos distintos é um **circuito**. Um circuito de comprimento n é denotado por C_n.

Exemplo:

Dizemos que um circuito é **par** (resp. **ímpar**) se seu comprimento é par (resp. impar).

Uma **seção** de um passeio P é um passeio que é uma subseqüência de termos consecutivos de P. A **concatenação** de dois passeios $P = (v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, v_k)$ e $Q = (v_k = u_0, b_1, u_1, \ldots, b_n, u_n)$, denotada por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$, é o passeio $(v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, v_k, b_1, u_1, \ldots, b_n, u_n))$. O **reverso** de $P = (v_0, a_1, v_2, a_2, \ldots, a_{k-1}, v_k)$, denotado por $\mathbf{P^{-1}}$, é o passeio $(v_k, a_k, \ldots, v_1, a_1, v_o)$.

Convenções: o termo passeio (respectivamente trilha, caminho, circuito) também será usado para denotar um grafo ou subgrafo cujos vértices e arestas são os termos de um passeio (respectivamente trilha, caminho, circuito). No caso de grafos simples um passeio $P = (v_0, a_1, v_2, a_2, \ldots, a_{k-1}, v_k)$ fica determinado pela seqüência $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ de seus vértices; assim quando conveniente nos referimos ao passeio $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$. Quando o grafo não é simples, ao denotarmos um passeio por $(v_0, v_2, \ldots, v_k)$, deve ficar subentendido que estamos nos referindo a qualquer um dos passeios com tal seqüência de vértices. No caso de circuitos, escrevemos apenas a seqüência dos vértices distintos. Assim, $C = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ denota um circuito com início e término v_0, e vértices internos $v_1, \ldots, v_k$.

Exercício 5. *Seja G um grafo e sejam u, v, x três vértices distintos de G. Prove que se G contém um caminho de u a v e um caminho de v a x, então G contém um caminho de u a x.*

Proposição 1.5. *Seja G um grafo simples tal que $\delta(G) \geq 2$. Então G contém um caminho de comprimento $\delta(G)$ e um circuito de comprimento pelo menos $\delta(G) + 1$.*

Prova. [*Técnica do caminho mais longo.*]

Seja $k := \delta(G)$ e seja $P = (v_o, \dots, v_m)$ um caminho mais longo em G. Então todos os vizinhos de v_m pertencem a $V(P)$ (caso contrário, teríamos um caminho mais longo do que $\|P\|$, contrariando a escolha de P). Como $g(v_m) \geq k$, temos que $m \geq g(v_m) \geq k$, e portanto o comprimento de P é pelo menos k. Considere o menor índice i tal que $v_i v_m \in A(G)$. Então $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_m)$ é um circuito de comprimento pelo menos $k + 1$. ■

• Conexidade

Um grafo é **conexo** se para todo par de vértices distintos u, v existe um caminho de u a v. Um grafo que não é conexo é dito **desconexo**.

Os *subgrafos conexos maximais* de um grafo são chamados **componentes**.

OBS: Um (sub)grafo G é dito *maximal* (resp. *minimal*) em relação a uma certa propriedade $\mathcal{P}$ (por ex. ser conexo) se G tem a propriedade $\mathcal{P}$, mas nenhum supergrafo (resp. subgrafo) próprio de G tem a propriedade $\mathcal{P}$. Por exemplo, dizer que *H é um subgrafo conexo maximal de G* equivale a dizer que *H é um subgrafo conexo de G e além disso, não existe nenhum supergrafo próprio de H que é um subgrafo conexo de G.* Note que, nada impede que G tenha um outro subgrafo conexo de tamanho maior ou igual ao de H.

Exemplo:

Exercício 6. *Se G é um grafo simples não-vazio com $|V(G)| \leq 2n$ e $g(v) \geq n$ para todo v em G, então G é conexo.*

Exercício 7. *Todo grafo conexo com $n \geq 1$ vértices possui pelo menos $n - 1$ arestas.*

Exercício 8. *Quaisquer dois caminhos mais longos em um grafo conexo possuem um vértice em comum.*

• Distância, diâmetro, cintura e circunferência

A **distância** entre dois vértices u e v de um grafo G, denotada por $d_G(u, v)$ ou simplesmente $d(u, v)$, é o comprimento de um caminho mais curto de u a v. Se não existe nenhum caminho de u a v, então definimos $d(u, v)$ como sendo infinita ($d(u, v) = \infty$).

Proposição 1.6. *Um grafo é bipartido se e só se não contém circuitos ímpares.*