Introdução à Teoria dos Grafos (MAC-5770)

LISTA 9 - 1o. sem/2003

Coloração de vértices

Data de Entrega: 16/junho/2003

Notacão: Para qualquer grafo G, seja

- $\omega(G)$ a cardinalidade de um clique (subgrafo completo) máximo;
- $\alpha(G)$ a cardinalidade de um conjunto independente máximo de G, e
- $\chi(G)$ o número cromático de G.

---

1. Mostre que todo grafo G tem uma ordenação de seus vértices para a qual o algoritmo *greedy* (guloso) usa apenas $\chi(G)$ cores.

2. Seja G um grafo simples com n vértices. Prove que

   a) $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$.

   b) $\alpha(G) + \chi(G) \leq n + 1$.

3. Seja G um grafo com pelo menos 1 aresta. Prove que:

   a) Existe em G uma partição $VG = X \cup Y$ ($X, Y \neq \emptyset, X \cap Y = \emptyset$) tal que

   $$\chi(G[X]) + \chi(G[Y]) = \chi(G).$$

   b) Se G não é completo, então existe uma partição $VG = X \cup Y$ tal que

   $$\chi(G[X]) + \chi(G[Y]) > \chi(G).$$

4. Sejam $I_1, I_2, \ldots, I_n$ intervalos fechados na reta real. Seja G o grafo simples com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tal que para todo i, j,

   $$v_i \text{ é adjacente a } v_j \text{ se e só se } I_i \cap I_j \neq \emptyset.$$

   Mostre que $\chi(G) = \omega(G)$.

   Sugestão: indução em n. Remova um intervalo que tem o menor extremos superior.