Introdução à Teoria dos Grafos (MAC-5770)

LISTA 6 - 1o. sem/2003

Emparelhamentos

Data de Entrega: 7/maio e 12/maio

1. [Entregar 7/maio.] Prove que uma árvore tem no máximo um emparelhamento perfeito.

2. Enuncie o Teorema de Hall sobre emparelhamentos em grafos bipartidos. (Teorema 5.2 do Capítulo 5, visto em aula). Prove este teorema por indução no número de vértices do grafo.

3. Prove: Se G é grafo (X, Y)-bipartido com pelo menos uma aresta e $g(x) \geq g(y)$ para todo x em X e todo y em Y, então existe em G um emparelhamento que cobre X.

4. Def: Um *retângulo latino* $m \times n$ é ua matriz com m linhas e n colunas, cujas entradas são símbolos, sendo que cada símbolo aparece no máximo uma vez em cada linha e em cada coluna.

   Um *quadrado latino de ordem* n é um retângulo latino $n \times n$ de n símbolos.

   Prove: Se $m < n$ então todo retângulo latino $m \times n$ sobre n s¡mbolos pode ser estendido a um quadrado latino de ordem n. (Sugestão: usar o resultado do exercício anterior.)

5. Seja G um grafo simples com $|VG| \geq 2k$ e tal que $g(v) \geq k$ para todo $v \in G$. Mostre que G contém um emparelhamento com pelo menos k arestas. (Sugestão: tome um emparelhamento máximo e prove que este emparelhamento tem pelo menos k arestas.)