Introdução à Teoria dos Grafos (MAC-5770)

LISTA 4 - 1o. sem/2003

Conexidade e Árvores

Data de entrega: 23/abril/2003

1. a) Mostre que se G é um grafo simples de ordem n tal que $g(v) \geq (n-1)/2$ para todo v em $V(G)$, então G é conexo.

   b) Seja n um número par e seja $k = n/2 - 1$. Exiba — para todo n par — um grafo G_n, simples, desconexo e k-regular de ordem n. (Defina formalmente como é G_n.)

2. Use indução em k para provar que as arestas de um grafo conexo simples com $2k$ arestas, $k \geq 1$, k inteiro, pode ser particionado em caminhos de comprimento 2. A afirmação continuaria válida se omitíssemos a hipótese de conexidade?

3. Seja G um grafo conexo e seja H um subgrafo acíclico de G. Mostre que H pode ser estendido a uma árvore geradora de G (i.e., existe uma árvore geradora em G que contém H).

4. Escreva o algoritmo explicado em aula (que chamamos de "Mesquinho" – não é o de Kruskal) para encontrar uma árvore geradora de custo mínimo num grafo conexo cujas arestas têm peso não-negativo. Prove que esse algoritmo de fato constrói uma árvore ótima. (Sugestão: usar idéia análoga à da prova feita para o Algoritmo de Kruskal.)

5. Seja T uma árvore e sejam P_1, P_2 e P_3 três caminhos de T, tais que dois a dois se intersectam. Prove que existe um vértice comum a esses 3 caminhos.

RECOMENDAÇÃO: Resolver os exercícios numa folha sulfite, escrevendo o enunciado antes de cada exercício. Deixar um espaçamento duplo entre as linhas para facilitar a correção. Caprichar na apresentação. Resolver individualmente.