Introdução à Teoria dos Grafos (MAC-5770)

LISTA 3 - 1o. sem/2002 - Parte 1

Árvores

Data da entrega dos exercícios 4 e 5: 9/abril)

1. *Definição:* Uma *k-coloração* de um grafo G é uma atribuição de k cores aos vértices de G tal que vértices adjacentes recebem cores diferentes.

   Definição: Dizemos que uma árvore é *equicolorida* se tem uma 2-coloração com igual número de vértices de cada cor.

   Definição: Numa árvore um vértice de grau 1 é chamado *folha*.

   Prove que toda árvore equicolorida tem pelo menos uma folha de cada cor.

2. Prove que se G é um grafo simples com pelo menos 5 vértices então ou G ou o seu complemento $\bar{G}$ contém um circuito.

3. Seja G um grafo conexo e seja α uma aresta de G. Prove que α pertence a todas as árvores geradoras de G se e só se α é uma aresta-de-corte de G.

4. Seja $\mathcal{F}(T)$ o número de folhas de uma árvore T. Mostre que se T é uma árvore não trivial, então

$$\mathcal{F}(T) = 2 + \sum_{g(v) \geq 3} (g(v) - 2).$$

5. Seja G um grafo conexo, T_1 e T_2 árvores geradoras distintas de G, e seja α uma aresta de T_1. Prove que existe uma aresta β em T_2 tal que $T_1 - \alpha + \beta$ é uma árvore geradora de G.

RECOMENDAÇÃO: Resolver os exercícios numa folha sulfite, escrevendo o enunciado antes de cada exercício. Deixar um espaçamento duplo entre as linhas para facilitar a correção. Caprichar na apresentação. Resolver individualmente.