Introdução à Teoria dos Grafos (MAC-5770)

LISTA 2 - 1o. sem/2003

Caminhos, circuitos e grafos eulerianos

Data de entrega dos exercícios: 17, 19 e 24 de março

1. (Entrega: 17/março) Todo grafo conexo com $n \geq 1$ vértices possui pelo menos $n-1$ arestas. (Corresponde ao Exercício 12 das Notas de Aula.]
2. (Entrega: 17/março) Prove que quaisquer dois caminhos mais longos em um grafo conexo possuem um vértice em comum. [Corresponde ao Exercício 12 das Notas de Aula.]
3. (Entrega: 19/março) Seja w um vértice de um grafo conexo G. Mostre que G é bipartido se se só se $d(w,x) \neq d(w,y)$ para toda aresta xy.
4. (Entrega: 24/março) Prove que se G é um grafo simples tal que todo vértice tem grau pelo menos 3, então G contém um circuito de comprimento par.
5. (Entrega: 24/março) Prove que um grafo conexo G é euleriano se e só se existem em G circuitos disjuntos nas arestas $C_1, C_2, \ldots, C_k$ tais que $A(G) = A(C_1) \cup A(C_2) \cup \ldots \cup A(C_k)$. Em outras palavras, um grafo é euleriano se e só se o seu conjunto de arestas pode ser particionado em circuitos. (Veja exercício 14 do Capítulo 2.)

Resolver, mas não precisa entregar:

A. Considere um tabuleiro de xadrez (8×8). É possível fazer uma seqüência de movimentos válidos com o *cavalo* de modo que cada um dos movimentos válidos possíveis seja realizado exatamente uma vez? (Um movimento válido entre duas posições do tabuleiro é realizado sempre que se muda de uma posição para outra obedecendo a regra). Justifique usando linguagem da teoria dos grafos.

B. Seja G um grafo conexo cujos vértices têm grau par, e que possui um número par de arestas. Prove que as arestas de G podem ser coloridas com as cores *azul* e *vermelha*, de forma que em cada vértice incida o mesmo número de arestas azuis e vermelhas.

C. Prove ou desprove: Se G é um grafo euleriano com arestas α, β que têm um vértice comum, então G tem uma trilha euleriana na qual α e β aparecem consecutivamente. (Veja exercício 17 do Capítulo 2.)