• Passeios, trilhas, caminhos e circuitos

Um **passeio** em um grafo é uma seqüência finita não vazia $P = (v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, v_k)$, cujos termos são alternadamente vértices v_i e arestas a_j, e tal que, para todo i, $1 \leq i \leq k$, os extremos de a_i são v_{i-1} e v_i. Dizemos que P é um passeio **de** v_o **a** (**para**) v_k, e P **passa** pelos vértices v_i e pelas arestas a_j. Os vértices v_o e v_k são a **origem** e o **término** de P, respectivamente; e os vértices $v_1, \ldots, v_{k-1}$ são chamados **vértices internos** de P. O conjunto dos vértices e das arestas que definem P é denotado por $V(P)$ e $A(P)$, respectivamente.

O **comprimento** de P, denotado por $\|P\|$, é o número de arestas de P.

Uma **trilha** é um passeio sem arestas repetidas. Um **caminho** é um passeio sem vértices repetidos. Um passeio é **fechado** se tem comprimento não nulo e sua origem e seu término coincidem. Uma trilha fechada cuja origem e vértices internos são todos distintos é um **circuito**. Um circuito de comprimento n é denotado por C_n.

Exemplo:

Dizemos que um circuito é **par** (resp. **ímpar**) se seu comprimento é par (resp. impar).

Uma **seção** de um passeio P é um passeio que é uma subseqüência de termos consecutivos de P. A **concatenação** de dois passeios $P = (v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, v_k)$ e $Q = (v_k = u_0, b_1, u_1, \ldots, b_n, u_n)$, denotada por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$, é o passeio $(v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, v_k, b_1, u_1, \ldots, b_n, u_n))$. O **reverso** de $P = (v_0, a_1, v_2, a_2, \ldots, a_{k-1}, v_k)$, denotado por $\mathbf{P^{-1}}$, é o passeio $(v_k, a_k, \ldots, v_1, a_1, v_o)$.

Convenções: o termo passeio (respectivamente trilha, caminho, circuito) também será usado para denotar um grafo ou subgrafo cujos vértices e arestas são os termos de um passeio (respectivamente trilha, caminho, circuito). No caso de grafos simples um passeio $P = (v_0, a_1, v_2, a_2, \ldots, a_{k-1}, v_k)$ fica determinado pela seqüência $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ de seus vértices; assim quando conveniente nos referimos ao passeio $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$. Quando o grafo não é simples, ao denotarmos um passeio por $(v_0, v_2, \ldots, v_k)$, deve ficar subentendido que estamos nos referindo a qualquer um dos passeios com tal seqüência de vértices. No caso de circuitos, escrevemos apenas a seqüência dos vértices distintos. Assim, $C = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ denota um circuito com início e término v_0, e vértices internos $v_1, \ldots, v_k$.

Exercício 7. *Seja G um grafo, e u, v vértices de G. Se G contém um passeio P de u a v, então G contém um caminho Q de u a v tal que $V(Q) \subseteq V(P)$.*

Exercício 8. *Seja G um grafo e sejam u, v, x três vértices distintos de G. Prove que se G contém um caminho de u a v e um caminho de v a x, então G contém um caminho de u a x.*

Exercício 9. *Prove ou desprove as seguintes afirmações:*

a) Todo passeio fechado ímpar contém uma seção que é um circuito par.

b) Todo passeio fechado par contém uma seção que é um circuito par.

Proposição 1.5. *Seja G um grafo simples tal que $\delta(G) \geq 2$. Então G contém um caminho de comprimento $\delta(G)$ e um circuito de comprimento pelo menos $\delta(G) + 1$.*

Prova. [*Técnica do caminho mais longo.*]

• Conexidade

Um grafo é **conexo** se para todo par de vértices distintos u, v existe um caminho de u a v. Um grafo que não é conexo é dito **desconexo**.

Os *subgrafos conexos maximais* de um grafo são chamados **componentes**.

OBS: Um (sub)grafo G é dito *maximal* (resp. *minimal*) em relação a uma certa propriedade $\mathcal{P}$ (por ex. ser conexo) se G tem a propriedade $\mathcal{P}$, mas nenhum supergrafo (resp. subgrafo) próprio de G tem a propriedade $\mathcal{P}$. Por exemplo, dizer que *H é um subgrafo conexo maximal de G* equivale a dizer que *H é um subgrafo conexo de G e além disso, não existe nenhum supergrafo próprio de H que é um subgrafo conexo de G.* Note que, nada impede que G tenha um outro subgrafo conexo de tamanho maior ou igual ao de H.

Exemplo:

Exercício 10 . *Se G é um grafo simples não-vazio com $|V(G)| \leq 2n$ e $g(v) \geq n$ para todo v em G, então G é conexo.*

Exercício 11. *Todo grafo conexo com $n \geq 1$ vértices possui pelo menos $n - 1$ arestas.*

Exercício 12. *Quaisquer dois caminhos mais longos em um grafo conexo possuem um vértice em comum.*

• Distância, diâmetro, cintura e circunferência

A **distância** entre dois vértices u e v de um grafo G, denotada por $d_G(u,v)$ ou simplesmente $d(u,v)$, é o comprimento de um caminho mais curto de u a v. Se não existe nenhum caminho de u a v, então definimos $d(u,v)$ como sendo infinita ($d(u,v) = \infty$). A maior das distâncias entre quaisquer dois vértices de G é o **diâmetro** de G, denotada por **diam(G)**. A **cintura** (*girth*) de um grafo G, denotada por **cint(G)** é o comprimento de um menor circuito de G. A **circunferência** de um grafo é o comprimento de um maior circuito do grafo. Se G não tem nenhum circuito, definimos sua cintura como sendo ∞ e sua circunferência como sendo zero.

Proposição 1.6. *Um grafo é bipartido se e só se não contém circuitos ímpares.*

Prova. (na aula)