# Capítulo 1
## Conceitos e Resultados Básicos

Um **grafo** é um par ordenado $(V, A)$, onde $V$ e $A$ são conjuntos disjuntos, e cada elemento de $A$ corresponde a um par não-ordenado de elementos de $V$. Os elementos do conjunto $V$ são chamados **vértices** e os elementos do conjunto $A$ são chamados **arestas**. Quando uma aresta $a$ corresponde a um par $\{u, v\}$ de vértices, denotamos isso escrevendo $a = \{u, v\}$.

Exemplo:

Se $G$ é um grafo, então também denotamos o seu conjunto de vértices por $V(G)$, e o seu conjunto de arestas por $A(G)$. Assim, tendo o nome de um grafo, ainda que os nomes do seu conjunto de vértices e do seu conjunto de arestas nao sejam explicitados, podemos sempre nos referir a esses objetos.

### • Adjacência e incidência de vértices e arestas

Se $\alpha = \{u, v\}$ é uma aresta de um grafo, dizemos que $\alpha$ **vai de** $u$ **para** $v$, ou **liga** os vértices $u$ e $v$, ou **incide em** $u$ (e em $v$). Também dizemos que $u$ e $v$ são os **extremos** (ou as **pontas**) de $\alpha$; que $u$ e $v$ são **adjacentes** (ou **vizinhos**), e que $u$ é **adjacente** a $v$.

Arestas com um extremo em comum são chamadas **adjacentes**; arestas com os mesmos extremos são chamadas **paralelas** ou **múltiplas**. Uma aresta com extremos iguais é um **laço**.

Exemplo:

Muitas vezes, para simplificar a notação, uma aresta com extremos $u$ e $v$ é denotada por $uv$.

A **ordem** de um grafo $G = (V, A)$ é a cardinalidade de $V$; o seu **tamanho** é a soma $|V| + |A|$.

### • Grau de vértices e de grafos

O **grau** de um vértice $v$, denotado por $g_G(v)$, é o número de arestas que incidem em $v$, onde os laços são contados duas vezes. Um vértice de grau zero é chamado **isolado**. Se o grafo a que estamos nos referindo é óbvio pelo contexto, o grau de um vértice $v$ nesse grafo é denotado simplesmente por $\mathbf{g}(v)$.

O **grau mínimo** de um grafo $G$ é o número $\delta(G) := \min\{g(v) : v \in V(G)\}$; e o **grau máximo** de $G$ é o número $\Delta(G) := \max\{g(v) : v \in V(G)\}$. O **grau médio** de $G$ é o número $\bar{g}(G) := \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} g(v)$.

Exemplo:

Da definição de grau de um vértice, segue imediatamente o seguinte resultado.

**Proposição 1.1.** *Para todo grafo $G$ temos que $\sum_{v \in V(G)} g(v) = 2\ |(A(G)|$. Ou seja, a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de suas arestas.*

**Corolário 1.2** *Todo grafo tem um número par de vértices de grau ímpar.*

<u>Exercício</u> 1. *Prove que se $G$ é um grafo sem vértices isolados e $|A(G)| < |V(G)|$, então $G$ tem pelo menos 2 vértices de grau 1.*

<u>Exercício</u> 2. *Seja $G$ um grafo com pelo menos 2 vértices. Prove que se $|A(G)| \geq |V(G)| + 1$ então $G$ possui um vértice com grau pelo menos 3.*

• Isomorfismo de grafos

Sejam $G$ e $H$ dois grafos. Dizemos que $G$ é **isomorfo** a $H$, e escrevemos $G\ H$, se existe uma bijeção $\varphi : V(G) \to V(H)$ tal que $uv \in A(G) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in A(H)$ para todo $u, v \in V(G)$. A bijeção $\varphi$ é chamada um **isomorfismo**; e se $G = H$ então é $\varphi$ é chamada um **automorfismo**.

<u>Exercício</u> 3. *Mostre que os seguintes grafos são isomorfos.*

• Tipos especiais de grafos

Um grafo é **simples** se não tem laços e nem arestas múltiplas. É **finito** se seus conjuntos de vértices e arestas são finitos. Consideramos aqui apenas grafos finitos, devendo isso ficar sempre subentendido.

Um grafo $G$ é **vazio** se $V(G) = A(G) = \emptyset$. Um grafo com apenas um vértice e nenhuma aresta é chamado **trivial**.

Um grafo **completo** é um grafo simples em que quaisquer dois de seus vértices distintos são adjacentes. A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo com $n$ vértices; que é denotado por $K_n$. O grafo $K_3$ é também chamado de **triângulo**.

Exemplos:

Um grafo $G$ é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos $X$ e $Y$ ($X \cup Y = V(G)$

e $X \cap Y = \emptyset$) de modo que cada aresta de $G$ tenha um extremo em $X$ e outro em $Y$. Uma tal partição é chamada uma **bipartição** do grafo.

Exemplos:

Um grafo **bipartido completo** é um grafo simples com bipartição $(X, Y)$, no qual cada vértice de $X$ é adjacente a cada vértice de $Y$. Se $|X| = m$ e $|Y| = n$ então um tal grafo é denotado por $K_{m,n}$. O grafo $K_{1,3}$ é chamado **garra** (*claw*).

Exemplos:

Um grafo é $k$-**regular** se todos os seus vértices têm grau $k$; $G$ é **regular** se é $k$-regular para algum $k$.

Se $G$ é um grafo simples, o **complemento** de $G$, denotado por $\bar{G}$ é um grafos simples com $V(\bar{G}) = V(G)$, sendo que dois vértices são adjacentes em $\bar{G}$ se e só se eles não são adjacentes em $G$.

Exemplos:

<u>Exercício</u> 4. *Considere um grupo com $n \geq 4$ pessoas, sobre o qual sabe-se que em todo grupinho de 4 pessoas sempre existe uma que conhece as outras 3 (desse grupinho). Prove que, neste caso, em qualquer grupinho de 4 pessoas existe uma que conhece todas as pessoas do grupo. Formule o exercício na linguagem de grafos e resolva-o. Em linhas gerais, qual é a 'estrutura' ('cara') do grafo correspondente?*

<u>Exercício</u> 5. *Um grafo $G$ é* **auto-complementar** *se $G$ é isomorfo ao seu complemento. Mostre que se $G$ é um grafo simples auto-complementar então $|VG| \equiv 0 \ (mod\ 4)$ ou $|VG| \equiv 1 \ (mod\ 4)$.*

• Subgrafos

Um grafo $H$ é um **subgrafo** de um grafo $H$ se $V(H) \subseteq V(G)$ e $A(H) \subseteq A(G)$; escrevemos $H \subseteq G$. Neste caso, também dizemos que $H$ **está contido** em $G$, ou que $G$ **contém** $H$, ou que $G$ é um **supergrafo** de $H$. Se $H \subseteq G$, mas $H \neq G$ então dizemos que $H$ é um **subgrafo próprio** de $G$, e escrevemos $H \subset G$.

Dizemos que $H$ é um subgrafo **gerador** (*spanning subgraph*) de $G$ se $H \subseteq G$ e $V(H) = V(G)$.

Se $G$ é um grafo e $\emptyset \neq X \subseteq V(G)$ então o subgrafo de $G$ **induzido** (ou **gerado**) por $X$ é o subgrafo $H$ de $G$ tal que $V(H) = X$ e $A(H)$ é precisamente o conjunto das arestas de $G$ que têm ambos os extremos em $X$. Neste caso, $H$ é denotado por $G[X]$.

Denotamos por $G - X$ o subgrafo induzido por $V(G) \setminus X$; é o subgrafo obtido de $G$ removendo-se todos os vértices em $X$ e todas as arestas que incidem neles.

Se $G$ é um grafo e $\emptyset \neq F \subseteq A(G)$ então o subgrafo de $G$ **induzido** (ou **gerado**) por $F$ é o subgrafo $H$ de $G$ tal que $A(H) = F$ e $V(H)$ é o conjunto dos vértices de $G$ que são extremos das arestas em $F$. Neste caso, $H$ é denotado por $G[F]$

Denotamos por $G - F$ o subgrafo de $G$ obtido removendo-se as arestas em $F$.

Para simplificar, em vez de $G - \{a\}$ escrevemos $G - a$, onde $a$ é um vértice ou uma aresta de $G$.

PROBLEMA: *Prove que numa festa com 6 pessoas sempre existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente, ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente.*

Considerando que, se $x$ conhece $y$ então $y$ conhece $x$ (isto é, a relação 'conhecer' é simétrica), na linguagem de grafos a afirmação a ser provada é a seguinte.

**Proposição 1.3.** *Se $G$ é um grafo simples com 6 vértices, então ou $G$ contém um triângulo, ou o seu complemento contém um triângulo.*

EXERCÍCIO 6. *Considere um campeonato de xadrez onde cada dois jogadores disputam no máximo uma partida entre si. Prove que em qualquer etapa de um tal campeonato há sempre (pelo menos) dois jogadores que realizaram exatamente o mesmo número de partidas. Formule o problema na linguagem de grafos e resolva-o.*