

## Capítulo 2

### GRAFOS EULERIANOS

#### O PROBLEMA DAS 7 PONTES DE KÖNIGSBERG:

*É possível achar um passeio que começa em uma das regiões de terra de Königsberg (regiões  $A, B, C, D$  na figura abaixo), passa por cada uma das 7 pontes exatamente uma vez e volta à região de origem?*

Considere um grafo  $G$  cujos vértices representem as regiões de terra ( $A, B, C, D$ ), e cujas arestas representem as pontes ligando as regiões correspondentes (veja figura acima). É imediato que o problema das 7 pontes de Königsberg se reduz ao problema de decidir se o grafo  $G$  acima tem uma *trilha fechada* que passa por todas as suas arestas. Leonhard Euler (1736) provou que um tal passeio não existe.

Uma trilha que passa por todas as arestas de um grafo é chamada uma **trilha de Euler**, ou **trilha euleriana**. Um grafo é **euleriano** se possui uma trilha euleriana fechada.

[ Königsberg ficava na antiga Prússia (século dezoito). Foi rebatizada de Kaliningrado pelos soviéticos em 1946. Atualmente pertence à Rússia. O rio, era conhecido como Pregel, hoje chama-se Pregolya. Euler era professor de matemática em St. Petersburgo quando tomou conhecimento do problema. Provou também resultados mais gerais sobre problemas do mesmo tipo. Não chegou porém a provar a suficiência da condição mencionada no teorema a seguir, embora seja considerado como autor desse resultado. O artigo de Euler sobre o problema das 7 pontes e generalização desse problema, publicado em 1736 é considerado o primeiro artigo sobre teoria dos grafos. O termo *grafo* não é usado nesse artigo (em latim). ]

**Teorema 2.1.** *Um grafo conexo é euleriano se e só se cada um de seus vértices tem grau par.*

**Prova.** [na aula]

**Corolário 2.2.** *Um grafo conexo tem uma trilha euleriana se e só se tem no máximo 2 vértices de grau ímpar.*

**Prova.** [na aula]

**Corolário 2.3.** *Seja  $G$  um grafo conexo com  $2k \geq 2$  vértices de grau ímpar. Então  $G$  tem  $k$  trilhas (abertas)  $T_1, T_2, \dots, T_k$  duas a duas disjuntas nas arestas e tais que  $A(T) = A(T_1) \cup A(T_2) \cup \dots \cup A(T_k)$ .*

**Prova.** [na aula]

EXERCÍCIO 14. *Prove que um grafo é euleriano se e só se o seu conjunto das arestas de pode ser particionado em circuitos.*

Denotamos por  $c(G)$  o número de componentes de  $G$ . Dizemos que uma aresta  $\alpha$  de  $G$  é uma **aresta-de-corte** ou **ponte** se  $c(G - \alpha) > c(G)$  (isto é, sua remoção aumenta o número de componentes).

#### ALGORITMO DE FLEURY

Entrada: Grafo  $G$  com no máximo dois vértices de grau ímpar.

Saída: Trilha euleriana em  $G$ .

( $P_1$ ) Se  $G$  possui vértices de grau ímpar, seja  $v_o$  um tal vértice; senão, seja  $v_o$  um vértice qualquer. Faça  $T_o = (v_o)$ .

( $P_2$ ) Tendo escolhido a trilha  $T_k = (v_o, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k)$ , faça  $G_k := G - \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ . Escolha em  $G_k$  uma aresta  $a_{k+1}$  incidente a  $v_k$ , dando preferência a uma que não seja ponte (se tal aresta não existir, escolha uma ponte). Seja  $a_{k+1} = \{v_k, v_{k+1}\}$  e  $T_{k+1} := T_k(v_k, a_{k+1}, v_{k+1})$ . Repita o passo  $P_2$  enquanto isto for possível.

**Teorema 2.4.** *Seja  $G$  um grafo conexo com no máximo dois vértices de grau ímpar. Então o algoritmo de Fleury (acima definido) contrói uma trilha euleriana em  $G$ .*

**Prova.** [Sugestão: provar por indução em  $|A(G)|$  (Exercício 15)]

EXERCÍCIO 15. *Faça a prova do Teorema 2.4., por indução no número de arestas do grafo.*

EXERCÍCIO 16. *Prove ou desprove: Existe um grafo conexo euleriano simples que tem um número par de vértices e um número ímpar de arestas.*

EXERCÍCIO 17. *Prove ou desprove: Se  $G$  é um grafo euleriano com arestas  $\alpha, \beta$  que têm um vértice comum, então  $G$  tem uma trilha euleriana na qual  $\alpha$  e  $\beta$  aparecem consecutivamente.*