EXERCÍCIOS

INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS

2o. SEMESTRE DE 2010

Instruções:

1. Os problemas e exercícios com data de entrega devem ser resolvidos e entregues. Estes exercícios farão parte de sua avaliação.
2. A entrega dos exercícios deve ser feita no começo da aula (as datas de entrega serão datas de aula).
3. O monitor levará em conta não apenas a correção de sua solução, mas também a apresentação (soluções mal escritas valerão menos).
4. Você deve fazer os demais problemas e exercícios, mas não é necessário entregar suas soluções.
5. Não deixe de atacar os desafios, mas eles podem resistir às suas investidas mais seriamente que os problemas.
6. A entrega de soluções de problemas e desafios sem data de entrega pode contribuir em sua avaliação.

Exercícios, problemas e desafios:

1. Seja X um conjunto. Mostre que não existe uma função sobrejetora $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$. [*Sugestão.* Considere $S = \{x \in X : x \notin f(x)\}$.] {*Data de entrega*: 2/9/2010}
2. (Problema) Suponha que X e Y sejam conjuntos e que existam funções injetoras $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$. Prove que existe uma bijeção $h\colon X \to Y$.
3. Sejam G e H dois grafos. Suponha que G seja isomorfo a um subgrafo de H e H seja isomorfo a um subgrafo de G. Mostre que, se os grafos G e H são finitos, então G é isomorfo a H. {*Data de entrega*: 2/9/2010}
4. Mostre que, se omitimos a hipótese de que G e H são grafos finitos no Exercício 3, então a conclusão daquele exercício é falsa.
5. (Problema) Seja X um conjunto e denotemos por $\mathcal{P}^{<\infty}(X)$ o conjunto dos subconjuntos finitos de X. Seja $f\colon \omega = \{0, 1, 2, \dots\} \to \mathcal{P}^{<\infty}(X)$ uma função e suponha que, para todo $n \in \omega$, existe uma função $g_n\colon n = \{0, \dots, n-1\} \to X$ tal que
   (a) $g_n(i) \in f(i)$ para todo $i \in n$
   e
   (b) os $g_n(i)$ $(i \in n)$ são todos distintos.
   Prove que existe uma função $g\colon \omega \to X$ tal que (a) $g(i) \in f(i)$ para todo $i \in \omega$ e (b) os $g(i)$ $(i \in \omega)$ são todos distintos. Se removemos a hipótese de que $f(i)$ é finito para todo i, o resultado ainda vale? {*Data de entrega*: 16/9/2010}

Date: Versão de 26 de novembro de 2010.

6. Suponha que uma função $A\colon \omega\times\omega\to\omega^+=\{0,1,\dots,\omega\}$ é tal que

$$A(m,n)=\begin{cases} n+1 & \text{se } m=0\\ A(m-1,1) & \text{se } m>0 \text{ e } n=0\\ A(m-1,A(m,n-1)) & \text{se } m>0 \text{ e } n>0. \end{cases} \tag{1}$$

Calcule $A(4,3)$. Prove que $A(m,n)<\omega$ para todo m e n usando um argumento de indução (descreva sua indução cuidadosamente). {*Data de entrega*: 2/9/2010}

7. (Desafio) Sejam ℓ e δ inteiros. Prove que existe um grafo G com $g(G)\geq\ell$ e $\delta(G)\geq\delta$.
8. Encontre um grafo G com $g(G)\geq 5$ e $\delta(G)\geq 3$ com o menor número de vértices possível. Não deixe de provar que seu grafo de fato tem o menor número de vértices possível. {*Data de entrega*: 16/9/2010}
9. Seja G com grafo com grau médio $\bar{d}(G)\geq 4+10^{-10}$. Prove uma cota inferior para a ordem de G que é exponencial na cintura de G, isto é, prove que $|G|\geq\alpha c^{g(G)}$ se $g(G)\geq g_0$, onde α, c e g_0 são constantes absolutas com $\alpha>0$ e $c>1$. Não use o teorema de Alon, Hoory e Linial. Prove que, usando o teorema daqueles autores, podemos enfraquecer a hipótese para $\bar{d}(G)\geq 2+10^{-10}$. Prove que tais cotas exponenciais não valem se supomos apenas $\bar{d}(G)\geq 2$.
10. Seja G um grafo 2-conexo. Prove que quaisquer dois vértices de G estão contidos em um circuito de G. {*Data de entrega*: 16/9/2010} [*Sugestão.* Fixe x e $y\in V(G)$. Prove que x pertence a um circuito de G. Dentre todos os circuitos C de G que contêm x, considere um que minimiza $d(y,C)=\min\{d(y,z)\colon z\in V(C)\}$.]
11. (Decomposição em orelhas) Seja G um grafo 2-conexo. Prove que existe uma seqüência de subgrafos $H_0\subset H_1\subset\cdots\subset H_k$ de G tal que (i) $H_0=K^2$, (ii) $H_k=G$, e (iii) $H_i=H_{i-1}+P_i$ para todo $1\leq i\leq k$, onde P_i é um H_{i-1}-caminho. (Dizemos que H_i é obtido de H_{i-1} pela adição da *orelha* P_i.) {*Data de entrega*: 16/9/2010}
12. Sejam $G_i=(V_i,E_i)$ $(i\in\{1,2\})$ dois grafos. Definimos o *produto categórico* $G_1\times G_2$ de G_1 e G_2 como sendo o grafo sobre $V_1\times V_2$ em que (x_1,x_2) é adjacente a (y_1,y_2) se e só se $\{x_1,y_1\}\in E_1$ e $\{x_2,y_2\}\in E_2$. Prove que $G_1\times G_2$ é conexo se e só se cada G_i é conexo e pelo menos um dos G_i contém um circuito de comprimento ímpar. {*Data de entrega*: 21/9/2010}
13. Seja G um grafo. Defina a relação $\sim$ sobre $E(G)$ colocando $e\sim f$ se e só se $e=f$ ou existe um circuito de G que contém ambos e e f. Mostre que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência. {*Data de entrega*: 21/9/2010}
14. (i) Seja G um grafo com grau médio $\bar{d}(G)\geq 2$. Mostre que G contém um subgrafo 2-conexo.
    (ii) Exiba um grafo G com grau médio $\bar{d}(G)\geq 3$ que não contém um subgrafo 3-conexo. {*Data de entrega*: 23/9/2010}
15. Seja G um grafo com grau médio $\bar{d}(G)\geq 4$ e cintura $g(G)\geq 5$. Mostre que G contém um subgrafo 3-conexo. [*Sugestão.* Considere subgrafos H de G satisfazendo $|H|\geq 4$ e $e(H)\geq 2(|H|-2)$. Siga a prova do Teorema de Mader, visto em sala.] {*Data de entrega*: 23/9/2010}

16. Seja T uma árvore com pelo menos uma aresta e sem vértices de grau 2. Prove que mais da metade dos vértices de T são folhas (vértices de grau 1). {*Data de entrega*: 19/10/2010}
17. Seja G um grafo e seja $\mathcal{T}$ uma coleção não-vazia de subárvores não-vazias de G. Seja $\nu(\mathcal{T}) = \max|\mathcal{T}'|$, onde o máximo é tomado sobre todas as subcoleções $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ de $\mathcal{T}$ constituídas de árvores duas-a-duas disjuntas nos vértices. Seja também $\tau(\mathcal{T}) = \min|C|$, onde o mínimo é tomado sobre todos os conjuntos $C \subset V(G)$ que *cobrem* $\mathcal{T}$, isto é, conjuntos C com $C \cap V(T) \neq \emptyset$ para todo $T \in \mathcal{T}$.
    (i) Prove que, para qualquer grafo G, temos $\nu(\mathcal{T}) \leq \tau(\mathcal{T})$.
    (ii) Suponha agora que G é uma árvore. Prove que $\nu(\mathcal{T}) = \tau(\mathcal{T})$. [*Sugestão.* Remova uma folha de G. Considere o caso $\nu(\mathcal{T}) = 1$ primeiro.]
    {*Data de entrega*: 19/10/2010}
18. (Continuação do Ex. 17) Sejam G e $\mathcal{T}$ como no Exercício 17.
    (i) Dê um exemplo em que temos $\nu(\mathcal{T}) = 1$ e $\tau(\mathcal{T}) > 2010$.
    (ii) Suponha agora que $\mathcal{T}$ é constituído de árvores com no máximo t vértices cada. Prove que $\nu(\mathcal{T}) \leq \tau(\mathcal{T}) \leq t\nu(\mathcal{T})$.
    {*Data de entrega*: 19/10/2010}
19. Seja G um grafo.
    (i) Mostre que G contém um subgrafo gerador bipartido B com $\delta(B) \geq \delta(G)/2$.
    (ii) Mostre que G contém um subgrafo bipartido B com $\delta(B) \geq \bar{d}(G)/4$, onde $\bar{d}(G)$ é o grau médio $2|E(G)|/|V(G)|$ de G.
    {*Data de entrega*: 19/10/2010}
20. Seja $\mathcal{T}(3,k)$ a classe das árvores T com grau máximo $\Delta(T) \leq 3$ que contêm no máximo k vértices de grau 3. Fixe um inteiro k e suponha que $T_1, T_2, \dots$ seja uma seqüência infinita de membros de $\mathcal{T}(3,k)$. Mostre que existem índices $j > i$ com T_j uma subdivisão de T_i. {*Data de entrega*: 21/10/2010}
21. Prove que as seguintes duas asserções são equivalentes para um grafo G. Como de usual, K^5 é o grafo completo de ordem 5 e $K^{3,3} = K(3,3)$ é o grafo bipartido completo com ambas as partes de cardinalidade 3.
    (M) O grafo G contém K^5 como menor ou contém $K(3,3)$ como menor.
    (T) O grafo G contém uma subdivisão de K^5 ou contém uma subdivisão de $K(3,3)$.
22. Seja G um grafo bipartido com bipartição (A,B). Mostre que as três asserções abaixo são equivalentes:
    (i) G é conexo e cada aresta de G pertence a um emparelhamento perfeito.
    (ii) G não é o complemento do K^2 e, para cada $x \in A$ e $y \in B$, o grafo $G - x - y$ tem um emparelhamento perfeito.
    (iii) G não é o complemento do K^2, $|A| = |B|$, e, para cada $\emptyset \neq X \subset A$, com $X \neq A$, temos $|\Gamma(X)| > |X|$.
    Os grafos bipartidos G satisfazendo (i)–(iii) são conhecidos como *grafos bipartidos elementares*. {*Data de entrega*: 11/11/2010}
23. Seja G um grafo bipartido com bipartição (A,B). Suponha que G tem um emparelhamento perfeito e que todo vértice em A tem grau pelo menos k. Mostre que G tem pelo menos $k!$ emparelhamentos perfeitos. {*Data de entrega*: 23/11/2010}

24. Seja $\mathcal{F} \subset 2^X$, onde X é um conjunto finito. Um *sistema de representantes distintos* (SRD) de $\mathcal{F}$ é uma família $\{r_F\colon F \in \mathcal{F}\}$ de elementos *distintos* de X, indexada por $\mathcal{F}$, com $r_F \in F$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

    (i) Prove que $\mathcal{F}$ admite um SRD se e só se,

$$\text{para todo } \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}, \text{ temos } \Big|\bigcup \mathcal{F}'\Big| \geq |\mathcal{F}'|. \tag{2}$$

    (ii) Como formulado em (i), restringimo-nos a coleções $\mathcal{F}$ 'sem membros repetidos'. Decida se esta restrição é necessária para o resultado valer.

    {*Data de entrega*: 23/11/2010}

25. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $\dim V = n$.

    (i) Sejam U e W dois subespaços de V. Seja $U \wedge W$ o maior subespaço de V contido em ambos U e W e seja $U \vee W$ o menor subespaço de V que contém ambos U e W. Claramente, $U \wedge W = U \cap W$. Descreva $U \vee W$. Mostre que vale a seguinte relação de *modularidade*:

$$\dim U \wedge W + \dim U \vee W = \dim U + \dim W. \tag{3}$$

    (ii) Dado um conjunto S de vetores de V arbitrário, definimos $\dim S$ como sendo a dimensão do subespaço $\langle S\rangle$ gerado por S. Sejam agora X e Y dois conjuntos de vetores de V. Mostre que vale a seguinte relação de *submodularidade*:

$$\dim X \cap Y + \dim X \cup Y \leq \dim X + \dim Y. \tag{4}$$

26. (Rado) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $\mathcal{F} \subset 2^V$ uma família de conjuntos de vetores de V. Um *sistema de representantes linearmente independentes* (SRLI) de $\mathcal{F}$ é uma família $\{r_F\colon F \in \mathcal{F}\}$ de vetores *linearmente independentes* de V, indexada por $\mathcal{F}$, com $r_F \in F$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Prove que $\mathcal{F}$ admite um SRLI se e só se,

$$\text{para todo } \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}, \text{ temos } \dim \bigcup \mathcal{F}' \geq |\mathcal{F}'|. \tag{5}$$

    Aqui, a notação é como no Ex. 25(ii). {*Data de entrega*: 23/11/2010} [*Sugestão.* Faça uma adaptação da prova do teorema de Hall devido a Rado; use a submodularidade dada em (4).]

27. Seja G um grafo. Uma matriz de *incidência* $M = M_G$ para G tem suas linhas indexadas pelos vértices de G e suas colunas indexadas pelas arestas de G. Cada entrada de M é 1, -1 ou 0. Fixe uma aresta e de G e suponha que $e = \{x, y\}$. A coluna correspondente a e em M é toda nula, exceto nas linhas correspondetes a x e y; nessas duas linhas, as entradas são -1 e 1 (tanto faz qual delas é 1 e qual é -1). Fixe uma matriz de incidência para G. Prove as asserções abaixo.

    (i) Seja $T = E(C)$ o conjunto de arestas de um circuito C de G. Mostre que as colunas de M correspondentes aos elementos de T são linearmente dependentes.

    (ii) Seja S um conjunto de colunas linearmente dependentes de M e seja $T \subset E(G)$ o conjunto de arestas de G que correspondem às colunas em S. Mostre que existe um circuito C em G que tem seu conjunto de arestas contido em T, isto é, com $E(C) \subset T$.

    (iii) Dado um conjunto de arestas $T \subset E(G)$, seja $v(T)$ o número de vértices no grafo $G[T]$ gerado por T em G e seja $c(T)$ o número de componentes em $G[T]$. Pomos $\dim T = \dim S$, onde S é o conjunto de colunas de M associadas às arestas em T (e $\dim S$ é como definido no Ex. 25(ii)). Prove que

$$\dim T = v(T) - c(T). \tag{6}$$

28. Seja G um grafo e sejam $H_1, \ldots, H_m$ subgrafos de G. Dê uma condição necessária e suficiente para que exista uma família $\{e_i\colon 1 \leq i \leq m\}$ de arestas distintas de G, com $e_i \in E(H_i)$ para todo i, tal que o grafo gerado pelo conjunto das arestas e_i ($1 \leq i \leq m$) seja uma floresta. {*Data de entrega*: 23/11/2010}
29. Prove que todo grafo 3-regular 2-conexo tem um emparelhamento perfeito. {*Data de entrega*: 25/11/2010}
30. (Menger/versão de arestas (versão de conjuntos como dica))