MAC 115 – Introdução à Computação – IF

$\binom{n}{k}$ Brincando com Lucas e Pascal $\triangle$

Primeiro Exercício-Programa (EP1) Entrega: **27 de setembro de 2010**

Em 1878 François Édouard Anatole Lucas provou um teorema interessante que caracteriza a paridade dos coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$ fazendo uso da representação binária de n e k. (Enunciaremos esse teorema a seguir.) Blaise Pascal,[1] outro matemático francês, provou vários resultados notáveis, sendo bastante conhecidos alguns de seus resultados sobre coeficientes binomiais, e o chamado *Triângulo de Pascal*.

Neste primeiro exercício-programa vamos fazer uso do Teorema de Lucas e do Triângulo de Pascal.

Vejamos antes algumas notações. Dado um inteiro p, denotamos por $(p)_2$ a representação de p na base 2. Por exemplo, se $p = 5$ então $(p)_2 = 101$. Dados dois inteiros p e q, dizemos que $(p)_2 \subseteq (q)_2$ se ao compararmos dois a dois os bits (dígitos binários) de $(p)_2$ e $(q)_2$ começando a partir do bit mais à direita temos que cada bit que compõe $(p)_2$ é menor ou igual ao correspondente bit que compõe $(q)_2$. Por exemplo, se $p = 5$ e $q = 23$, então $(p)_2 \subseteq (q)_2$, pois $(p)_2 = 101$ e $(q)_2 = 10111$. Se $p = 13$, então $(p)_2 \not\subseteq (q)_2$, pois $(13)_2 = 1101$.

Teorema de Lucas. *Sejam n e k dois inteiros, $0 \le k \le n$. Então $\binom{n}{k}$ é ímpar se e somente se $(k)_2 \subseteq (n)_2$.*

Assim, por exemplo, sem calcular o valor de $\binom{23}{5}$, por esse teorema podemos concluir que se trata de um número ímpar, pois $(5)_2 \subseteq (23)_2$. Se você estiver duvidando, calcule quanto é $\binom{23}{5}$.

Denotamos por $\langle n \rangle$ o número n módulo 2, isto é, $\langle n \rangle = 1$ se n é ímpar, e $\langle n \rangle = 0$ se n é par.

Considere T_n o Triângulo de Pascal correspondente ao inteiro n. Veja abaixo o triângulo T_6. Indicamos a ordem em que são dispostos os coeficientes binomiais, e como ficam as entradas de T_6.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

```
1
1   1
1   2   1
1   3   3   1
1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
1   6  15  20  15   6   1
```

[1] Pascal (1623–1662) inventou uma calculadora mecânica que realizava somas e subtrações. A linguagem de programação Pascal (desenvolvida por Niklaus Wirth no início da década de 70) foi assim denominada em sua homenagem. Leia mais sobre Pascal em `http://en.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal`

Considere agora $\langle T_n \rangle$ o Triângulo de Pascal módulo 2. Ou seja, $\langle T_n \rangle$ é obtido de T_n substituindo-se cada entrada p de T_n por $\langle p \rangle$. Para uma melhor visualização da estrutura fractal de $\langle T_n \rangle$, em vez de imprimir as entradas 1 e 0, você pode utilizar outros caracteres. Chamemos de $\langle\langle T_n \rangle\rangle$ essa nova representação (você pode escolher quaisquer dois outros caracteres). Na figura abaixo, representamos $\langle\langle T_{31} \rangle\rangle$ substituindo em $\langle T_{31} \rangle$ o caractere "1" pelo caractere "*"; e o caractere "0" pelo caractere " " (um espaço em branco).

```
*
**
* *
****
*   *
**  **
* * * *
********
*       *
**      **
* *     * *
****    ****
*   *   *   *
**  **  **  **
* * * * * * * *
****************
*               *
**              **
* *             * *
****            ****
*   *           *   *
**  **          **  **
* * * *         * * * *
********        ********
*       *       *       *
**      **      **      **
* *     * *     * *     * *
****    ****    ****    ****
*   *   *   *   *   *   *   *
**  **  **  **  **  **  **  **
* * * * * * * * * * * * * * * *
********************************
```

Sua tarefa:

Escrever os seguintes programas (o item (C) é opcional):

(A) Um programa que recebe como entrada um inteiro n, $n \leq 29$, e imprime T_n. O seu programa deve calcular $\binom{n}{k}$ usando o fato de que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}.$$

(Por que estamos impondo a restrição de n ser no máximo 29?)

(B) Um programa que recebe como entrada um inteiro n, $n \leq 100$, e imprime $\langle\langle T_n \rangle\rangle$. Neste caso, o seu programa deve usar o Teorema de Lucas para calcular $\langle\binom{n}{k}\rangle$. Note que você pode escolher quaisquer dois caracteres no lugar do 1 e do 0.

(C) Programa Bônus. (Valendo pontos extras.) Um programa que recebe como entrada um inteiro n, $n \leq 100$, e imprime $\langle\langle T_n \rangle\rangle$, desta vez sem fazer o cálculo explícito de $\binom{n}{k}$ e sem usar o Teorema de Lucas.

Como fazer isso?

Dica: Considerar a mesma fórmula mencionada no item (A) e mais algumas informações extras.

Note que a paridade do termo à esquerda pode ser calculada tendo-se certas informações a respeito dos termos que ocorrem na expressão do lado direito. Essas informações são as seguintes:

Dado um inteiro m, defina $\ell_2(m)$ como sendo o maior inteiro k tal que 2^k divide m. Por exemplo, $\ell_2(12) = 2$ e $\ell_2(15) = 0$. Conhecendo-se $\ell_2(\binom{n}{k-1})$, $\ell_2(n-k-1)$ e $\ell_2(k)$, podemos determinar a paridade de $\binom{n}{k}$. Pense um pouco como fazer isso. Procure fazer isso inteligentemente, de modo que você não precise ficar recalculando tudo a cada vez.

IMPORTANTE. A entrega desse EP deve ser feita pelo Paca.

Divitam-se! (fazendo o exercício-programa)

```
   1          1          1          *
  1 1        1 1        1 1        * *
 1 2 1      1 0 1      1 . 1      *   *
1 3 3 1    1 1 1 1    1 1 1 1    * * * *
```