EXERCÍCIOS DE MATEMÁTICA DISCRETA
2o. SEMESTRE DE 2003

[Os exercícios desta lista são reciclados de edições anteriores desta e disciplinas semelhantes. Alguns exercícios estão em sua versão original, em inglês. (Melhor assim do que demorar mais ainda para eu disponibilizá-los).]

1. Prove as seguintes estimativas. Nesta questão, escrevemos $O(f(x))$ para qualquer termo y tal que $|y| \leq C|f(x)|$ para todo x satisfazendo $|x| \leq x_0$, onde C e $x_0 > 0$ são constantes absolutas. (Observe que, nestas estimativas, estamos intessados em uma vizinhança de 0.)
   (*i*) $1 + x \leq \mathrm{e}^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   (*ii*) $1 + x > \exp\{x - x^2/2\}$ para todo $0 < x \leq 1$.
   (*iii*) $1 - x > \exp\{-x - x^2\}$ para todo $0 < x < x_0$, para algum $x_0 > 0$. De fato, podemos tomar, por exemplo, $x_0 = 0.68$.
   (*iv*) Prove que $1 + x \geq \exp\{x/(1 + x)\}$ para todo $x > -1$.
   [*Sugestão.* Lembre que $1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + \dots$ uniformemente se $|x| \leq x_0$ e $x_0 < 1$. Integre ambos os lados para obter
   $$-\log(1 - x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots]$$
2. Prove as seguintes estimativas para $\binom{a}{b}$, onde a e b são inteiros não-negativos.
   (*i*) Se $a \geq b$, então
   $$\binom{a}{b} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^b. \tag{1}$$
   (*ii*)
   $$\binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!}. \tag{2}$$
   (*iii*) Para todo $b > 0$,
   $$\binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b. \tag{3}$$
   [*Sugestão para* (*iii*). Avalie $(1+x)^a$ por cima e por baixo para $x = b/a$. Use, para tanto, $1 + x \leq \mathrm{e}^x$ e o binômio de Newton: $(1 + x)^a \geq \binom{a}{b}x^b$.]
   (*iv*) Prove a seguinte versão mais forte de (*iii*):
   $$\sum_{0 \leq j \leq b} \binom{a}{j} \leq \left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b. \tag{4}$$

Date: Versão de 10 de outubro de 2003.

3. Considere a identidade

$$\sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}=2^n, \tag{5}$$

e seja $\omega=\omega(n)$ uma função com $\omega\to\infty$ conforme $n\to\infty$. Podemos dizer que a soma em (5) está 'concentrada' nos termos com k satisfazendo

$$\left|k-\frac{n}{2}\right|\le\omega\sqrt{n}, \tag{6}$$

pois

$$\sum\nolimits_k^*\binom{n}{k}\sim 2^n, \tag{7}$$

onde $\sum_k^*$ indica soma sobre todos os k satisfazendo (6) e escrevemos $f(n)\sim g(n)$ se $\lim_n f(n)/g(n)=1$.

Suponha agora que $\varepsilon>0$ é um número real fixo. Podemos dizer que a soma em (5) está 'exponencialmente concentrada' nos termos com k satisfazendo

$$\left|k-\frac{n}{2}\right|\le\varepsilon n, \tag{8}$$

pois

$$\sum\nolimits_k'\binom{n}{k}\le 2^n\exp\{-c_\varepsilon n\}, \tag{9}$$

onde $\sum_k'$ indica soma sobre todos os k para os quais (8) *não vale*, $c_\varepsilon>0$ é uma constante que depende apenas de ε, e supomos $n\ge n_0(\varepsilon)$.

(i) Prove que a condição de que $\omega\to\infty$ é necessária para que (7) valha. Para tanto, use a fórmula de Stirling (14). De fato, use (14) para provar que se $k=k(n)=n/2+c_n\sqrt{n}$, onde $c_n\to c$ ($n\to\infty$) e c é uma constante, então

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\sim\frac{d}{\sqrt{n}}2^n, \tag{10}$$

onde $d=d(c)>0$ é uma constante que depende apenas de c.

(ii) Seja $0<\alpha<1$ um real fixo. Ponha

$$H(\alpha)=\alpha\log_2\frac{1}{\alpha}+(1-\alpha)\log_2\frac{1}{1-\alpha}. \tag{11}$$

Prove que

$$\binom{n}{\lfloor\alpha n\rfloor}=2^{(H(\alpha)+o(1))n}, \tag{12}$$

onde $o(1)\to 0$ conforme $n\to\infty$. [*Sugestão.* Stirling!]

(iii) Prove (7).

(iv) Prove (9).

[*Sugestão.* Considere um variável aleatória binomial X de parâmetros n e $1/2$, de forma que $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}2^{-n}$. Para ($iii$), aplique a desigualdade de Chebyshev (consulte suas notas de probabilidade!). Para (iv), use (ii).]

4. Para inteiros $t \le n$, ponha

$$g(n,t) = \max |\mathcal{F}| \tag{13}$$

onde o máximo é tomado sobre todos os $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}([n]) = 2^{[n]}$ que são *t-intersectantes*, isto é, para todo F e $F' \in \mathcal{F}$, temos $|F \cap F'| \ge t$. (Note que, aqui, não estamos considerando r-grafos para algum r fixo, mas sistemas de conjuntos sem restrição de cardinalidade para seus membros).

   (i) Mostre que $g(n,1) = 2^{n-1}$.

   (ii) Mostre que, para todo inteiro $t \ge 2$, temos $g(n,t) = (1+o(1))2^{n-1}$. Isto é, prove que $\lim_{n\to\infty} g(n,t)2^{-n+1} = 1$. [*Sugestão.* Use a fórmula de Stirling

$$n! = (1+o(1))\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n} \tag{14}$$

   para provar que

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + k} = (1+o(1))2^n\sqrt{\frac{2}{\pi n}} = o(2^n), \tag{15}$$

   para todo $k \in \mathbb{Z}$ fixo. Deduza que

$$\sum_{k \ge (n+t)/2} \binom{n}{k} = (1+o(1))2^{n-1},$$

   e use esse fato.]

5. Para naturais n, a, e b, seja

$$f(n,a,b) = \max |\mathcal{F}|, \tag{16}$$

onde o máximo é tomado sobre todos os sistemas de conjuntos $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ satisfazendo

$$|F| \equiv a \pmod 2 \qquad \text{para todo } F \in \mathcal{F} \tag{17}$$

e

$$|F \cap F'| \equiv b \pmod 2 \quad \text{para todo } F,\ F' \in \mathcal{F} \text{ com } F \ne F'. \tag{18}$$

Determine ou estime $f(n,a,b)$ para todos pares $(a,b) \in \{0,1\} \times \{0,1\}$.

6. [Equality case in Erdős–Ko–Rado] Let positive integers n and k be given, with $n > 2k$. Suppose $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ is an intersecting k-uniform hypergraph with

$$|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{k-1}. \tag{19}$$

Prove that there is $x \in [n]$ for which we have

$$\mathcal{F} = \{F \subset [n] \colon |F| = k \text{ and } x \in F\}. \tag{20}$$

7. Let $\mathcal{F} \subset \binom{[4r]}{2r}$ be a 2-intersecting family with $|\mathcal{F}|$ as large as possible. Prove that

$$|\mathcal{F}| = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon(r)\right)\binom{4r}{2r}, \tag{21}$$

where $\lim_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$.

[Extra credit] Try to prove (21) for a 'large' $\varepsilon(r)$. Can you prove it for some $\varepsilon(r)$ such that $\varepsilon(r)\binom{4r}{2r} \to \infty$?

8. [Kleitman] Suponha que $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, e $\mathcal{I}$ são sistemas de conjuntos sobre o conjunto $X = [n]$, isto é, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, e $\mathcal{I} \subset 2^X = \mathcal{P}(X)$. Suponha ainda que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são "fechados por se tomar subconjuntos" e $\mathcal{H}$ e $\mathcal{I}$ são "fechado por se tomar superconjuntos". Isto é, se $F \subset F' \in \mathcal{F}$, então $F \in \mathcal{F}$ e analogamente para $\mathcal{G}$; enquanto que se $H \subset H'$ e $H \in \mathcal{H}$, então $H' \in \mathcal{H}$ e analogamente para $\mathcal{I}$. Prove que

$$|\mathcal{F} \cap \mathcal{G}| \geq 2^{-n}|\mathcal{F}||\mathcal{G}|, \tag{22}$$

$$|\mathcal{H} \cap \mathcal{I}| \geq 2^{-n}|\mathcal{H}||\mathcal{I}|, \tag{23}$$

e

$$|\mathcal{F} \cap \mathcal{H}| \leq 2^{-n}|\mathcal{F}||\mathcal{H}|. \tag{24}$$

[*Sugestão.* É suficiente provar, por exemplo, (24). Para tanto, fixe um $x \in X$ e considere os membros de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{H}$ que contêm x e os membros de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{H}$ que não contêm x separadamente, e use indução em $n = |X|$.]

9. Suppose $\mathcal{F} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{P}([n])$. Show that if $\mathcal{F}$ is intersecting and $\mathcal{D}$ is a down-set, then $|\mathcal{F}| \leq (1/2)|\mathcal{D}|$.

10. [Kleitman] Let $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k \subset \mathcal{P}([n])$ be intersecting families. Show that

$$|\mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_k| \leq 2^n - 2^{n-k}. \tag{25}$$

For each n and k with $1 \leq k \leq n$, exhibit $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k \subset \mathcal{P}([n])$ for which equality holds in (25).

11. [Kleitman] Let $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}([n])$ be such that, for all F, $F' \in \mathcal{F}$, we have $F \cap F' \neq \emptyset$ and $F \cup F' \neq [n]$. Prove that $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-2}$.

12. Fix an integer $k \geq 2$ and let $\varepsilon > 0$ be a real number. Show that if $n \geq n_0(k, \varepsilon)$, then there is a system $\mathcal{B} \subset \binom{[n]}{k}$ with

$$|\mathcal{B}| \leq (1+\varepsilon)\binom{n}{k-1}\binom{k}{k-1}^{-1} \tag{26}$$

covering all $(k-1)$-element subsets of n, that is, such that for any $C \in \binom{[n]}{k-1}$, there is some $B \in \mathcal{B}$ such that $C \subset B$. [*Sugestão.* Consider k-tuples $x_1, \dots, x_k$ with $\sum_i x_i \equiv 0 \pmod n$.]

13. Let integers $2 \leq \ell \leq k \leq n$ be fixed. Let $\mathcal{C} \subset \binom{[n]}{\ell}$ be a system *hitting all k-element subsets of* $[n]$, that is, such that for any $B \in \binom{[n]}{k}$, there is $C \in \mathcal{C}$ with $C \subset B$.

(i) Show that

$$|\mathcal{C}| \geq \binom{n}{\ell}\binom{k}{\ell}^{-1}. \tag{27}$$

(ii) Suppose now that $\ell = 2$. How sharp do you think the lower bound in (27) is? [*Sugestão.* This is actually a graph theory question. Check your favourite graph theory book, if you don't see what this question is about.]

14. Let us say that a chain $\mathcal{C} = \{A_1, \ldots, A_k\}$, with $A_1 \subset \cdots \subset A_k$, of elements of $\mathcal{P}([n])$ is a *symmetric chain* if the following conditions hold:

(a) $\mathcal{C}$ is *saturated*, that is, $|A_i| = |A_{i-1}| + 1$ for all $1 < i \leq k$.

(b) $|A_1| + |A_k| = n$.

Prove the following assertions:

(i) $\mathcal{P}([n])$ may be partitioned into symmetric chains. [*Sugestão.* Use induction on n. Suppose $n > 0$ and that the result holds for smaller values of n. Let $\mathcal{P}([n-1]) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{C}_\lambda$ be a decomposition of $\mathcal{P}([n-1])$ into symmetric chains. Construct two chains from each $\mathcal{C}_\lambda$ as follows. Suppose $\mathcal{C}_\lambda$ is the chain $A_1 \subset \cdots \subset A_k$. Then consider $A_1 \subset \cdots \subset A_k \subset A_k \cup \{n\}$ and $A_1 \cup \{n\} \subset \cdots \subset A_{k-1} \cup \{n\}$.]

(ii) [Sperner] The maximal number of elements in an antichain in $\mathcal{P}([n])$ is $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

(iii) The chains in the decomposition of $\mathcal{P}([n])$ may be required to satisfy the following extra condition. Suppose $\mathcal{C}_\lambda$ is a chain $A_1 \subset \cdots \subset A_k$ in the decomposition of $\mathcal{P}([n])$. Then, for any $1 < i < k$, there is $B \subset [n]$ such that

$$A_{i-1} \subset B \subset A_{i+1} \tag{28}$$

and, furthermore, the chain of the decomposition that contains B has cardinality less than k. [*Sugestão.* Check the hint for (i).]

15. [Hansel] Prove that the number of antichains in $\mathcal{P}([n])$ is at most

$$3^{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}, \tag{29}$$

following the steps below or otherwise.

(i) Observe that we need to give an upper bound for the number of functions $f\colon \mathcal{P}([n]) \to \{0, 1\}$ that are decreasing (that is, such that $f^{-1}(1)$ is a down-set).

(ii) Consider a decomposition Π of $\mathcal{P}([n])$ into symmetric chains satisfying (iii) of the previews exercise.

(iii) Check how many decreasing functions f one may produce by defining f on each chain in Π in turn, considering smaller chains first. Suppose a function f is being constructed, and consider a chain $\mathcal{C}$ in Π with k elements ($k \geq 2$) on which f is still undefined (f is already defined on all smaller chains in Π). Argue that f

can only be extended in at most 3 ways on $\mathcal{C}$. [*Sugestão.* This is clear for $k = 2$. For $k > 2$, use property (*iii*) of the previous exercise.]

16. Prove that there is a colouring of the natural numbers with red and blue such that no infinite arithmetic progression is monochromatic.
17. Prove that the infinite subsets of $\mathbb{N}$ may be coloured with red and blue in such a way that no infinite subset $S \subset \mathbb{N}$ has all its infinite subsets coloured with the same colour. [*Sugestão.* Write $A \sim B$ if the symmetric difference $A \triangle B$ is finite; colour the sets so that, if $A = B \setminus \{b\}$, then A and B have different colours.]
18. Prove that there is a colouring of the pairs (2-element subsets) of $\mathbb{R}$ with red and blue such that no uncountable subset $S \subset \mathbb{R}$ has all its pairs of the same colour.
19. (*i*) Suppose a family of sets $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\mathbb{N}}$ is such that the symmetric difference $F \triangle F'$ is finite for all distinct F, $F' \in \mathcal{F}$. Prove that $\mathcal{F}$ is countable.

    (*ii*) A family of sets $\mathcal{F}$ is called *quasi-disjoint* if the intersection $F \cap F'$ is finite for all distinct F, $F' \in \mathcal{F}$. Prove that there is an uncountable quasi-disjoint family of sets $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\mathbb{N}}$.