Segunda lista de Programação não linear

Walter F. Mascarenhas

6 de Maio de 2019

Resumo

Essa lista contém exercícios sobre o método do Gradiente e suas generalizações.

1. Qual é a motivação para escolhermos $\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$ no método do Gradiente?

2. O que é a condição de Armijo e qual é a sua motivação?

3. Execute dois passos do método do gradiente com a condição de Armijo, com $\sigma = 1/2$ e $\mathbf{x}_0 = (1,1)^{\mathrm{T}}$ para a função
$$f(x,y) = 64x^2 + y^2.$$

4. Execute dois passos do método de busca direcional, com a direção de Newton e a condição de Armijo, com $\sigma = 1/2$ e $\mathbf{x}_0 = (1,1)^{\mathrm{T}}$ para a função
$$f(x,y) = 64x^2 + y^2.$$

5. Implemente o método do gradiente com a condição de Armijo usando a sua linguagem de programação favorita

6. Observe a taxa de convergência da sua implementação quando aplicada à função
$$f(x,y) = (\sin(x) + \cos(y))\,(\sin(3x) - \cos(4y)).$$

7. Implemente o método de busca direcional com a direção de Newton e busca de Armijo usando a sua linguagem de programação favorita

8. Observe a taxa de convergência da sua implementação do item anterior quando aplicada à função
$$f(x,y) = (\sin(x) + \cos(y))\,(\sin(3x)\,.\cos(4y)).$$

9. Mostre que se $\mathbf{d} \neq 0$ é uma direção tal que $\nabla f(x)^{\mathrm{T}} \mathbf{d} = 0$ então $\mathbf{d}$ pode ser de uma direção descida, subida ou nenhuma das duas coisas.

10. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$ tal que $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}$ satisfaz a condição de Armijo. Seja $0 < \mu < \lambda$. μ satisfaz a condição de Armijo? Prove ou dê um contra-exemplo.

11. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com $f \in C^2$, e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ e $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ não é semidefinida positiva. Prove que existe uma direção de descida $\mathbf{d}$ em $\mathbf{x}$.

12. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ com $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$. Seja $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva. Prove que $\mathbf{d} = -\mathbf{M}\nabla f(\mathbf{x})$ é uma direção de descida em $\mathbf{x}$.