Primeira lista de Programação não linear

Walter F. Mascarenhas

18 de Março de 2019

Resumo

Essa lista contém exercícios sobre assuntos básicos de cálculo e álgebra linear. Os exercícios fazem parte dos primeiros capítulos do livro da Ana Friedlander, que você deve estudar com atenção.

1. Suponha que $\lim_{k\to} x_k = \alpha$. Prove que se $\alpha > \beta$, então existe $M > 0$ tal que para qualquer $k \geq M$ se verifica que $x_k > \beta$.
2. Prove que se $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$ e para todo $k \geq 0$, $x_k \geq \beta$, então $\alpha \geq \beta$. Trocando o sinal de $\geq$ por $>$, a afirmação continua válida? Prove ou dê um contra-exemplo.
3. Se $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ é uma seqüência convergente, então essa seqüência é limitada? A recıproca é verdadeira?
4. Há uma seqüência convergente tal que $x_{2k} > 0$ e $x_{2k+1} < 0$ para todo k?
5. Escreva a expansão em série de Taylor em torno do ponto $x = 0$ para as seguintes funções:
   (a) $\cos(x)$
   (b) $\log(x+1)$
   (c) $\exp(x)$.
6. Considere a função $f(x,y) = x\cos(y) + y\sin(x)$. Determine a aproximação linear de f em torno do ponto $(0,0)$. Determine um limitante para o erro na região $[-1,1]\times[-1,1]$.
7. Considere as funções $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ com jacobianos $Jf \in \mathbb{R}^{p\times m}$ e $Jg \in \mathbb{R}^{m\times n}$, respectivamente. Encontre o jacobiano da função composta $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ dada por $h(x) = f(g(x))$.
8. Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ Para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, definimos $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b})$ com $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Calcule o gradiente e o hessiano da função q.
9. Encontre os autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{A} = \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$, onde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.
10. Prove que os autovetores de uma matriz associados a autovalores distintos são linearmente independentes e que se a matriz é simétrica eles são ortogonais.
11. Prove que os autovalores de uma matriz simétrica são positivos se e somente se a matriz é definida positiva.
12. Prove que se λ é um autovalor de uma matriz $\mathbf{A}$ não-singular, então $1/\lambda$ é um autovalor de $\mathbf{A}^{-1}$.
13. Prove que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é singular se e somente se 0 é um autovalor.