Dalang, Morton & Willinger II

Walter Mascarenhas

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
www.ime.usp.br/∼walterfm

29/05/2012

Resumo da aula passada

Teorema (Dalang, Morton & Willinger)

As duas afirmações a seguir são equivalentes:

(i) *Não há arbitragens.*

(ii) *Existe uma medida de probabilidade* $\mathbb{M}$, *equivalente a* $\mathbb{P}$, *tal que* $\{(\mathbf{s}_k, \mathcal{F}_k), k = 0, \ldots, n\}$ *é um martingal sob* $\mathbb{M}$.

Além disso, se alguma dessas duas condições é válida então podemos escolher $\mathbb{M}$ *de modo que* $d\mathbb{M}/d\mathbb{P}$ *é limitada.* ▲

Termos da aula passada

- Há $n+1$ instantes, enumerados por $k = 0, 1, \ldots, n$.
- Os preços no instante k são descritos por vetores $\mathbf{s}_k \in \mathbb{R}^d$, ou seja temos d ativos e no instante k o preço do i-ésimo ativo é $\mathbf{s}_k^i$.
- Os preços no instante k fazem parte da informação $\mathcal{F}_k$ disponível neste instante.
- Para cada k, $\mathcal{F}_k$ é uma sigma álgebra e o conjunto das sigma álgebras é uma filtração, i.e. $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{k+1}$.
- Os preços $\mathbf{s}_k$ são adaptados à filtração $\mathcal{F}_k$, ou seja, para cada k, $\mathbf{s}_k$ é mensurável com respeito a $\mathcal{F}_k$.

Pausa para reflexão

Pausa para reflexão

(1) Qual a razão para um formalismo matemático tão rebuscado?

(2) Tudo isto é realmente necessário?

Pergunta: A matemática é realmente necessária?

Resposta honesta e realista:

- Não, a matemática não é necessária. Fatores de ordem política, relacionamento, etc. são muito mais importantes.
- A maioria das pessoas competentes, e de sucesso, em finanças se vira muito bem sem matemática. Muitos simplesmente não acreditam em métodos quantitativos.
- Pior: há gestores de "fundos quants" que nem sabem matemática. Ou seja, há muito mito e pouca substância.

Por isso, uma pergunta melhor seria:

A matemática pode ajudar?

Pergunta: A matemática pode ajudar?

Resposta honesta e realista:

- Sim, desde que você saiba o que está fazendo.
- Para isto é preciso entender bem o método matemático.
- Você não é obrigado a usar matemática e pode viver bem sem ela.
- Porém, se for usar, por favor, faça direito e não como propaganda.

Pergunta: O formalismo é necessário?

Resposta, dentro do espírito de que se for fazer então faça direito:

- Em parte sim: o mínimo de formalismo apresentado aqui (sigma algebra, função mensurável, medida de probabilidade,etc.) é necessário para finanças quantitativas.
- Em parte não: há conceitos mais avançados que seria bom saber mas que não são essenciais. Pode ser mais vantajoso dedicar seu tempo escasso ao estudo de outras áreas fundamentais, como estatística.
- Exemplo: você pode entender o teorema de Dalang, Morton e Willinger sem saber os detalhes técnicos de sua prova.

Bom senso

- Se você não entende a matemática então não use.
- Não atribua à matemática defeitos e qualidades que ela não tem.
- Não se intimide com a matemática.
- Não culpe a matemática pelas barbeiragens de algumas pessoas que não sabem usá-la.
- Não se deixe levar por modas tolas, contra ou a favor a matemática.
- Tenha bom senso

De volta à matemática

Resumo da aula passada

Teorema (Dalang, Morton & Willinger)

As duas afirmações a seguir são equivalentes:

(i) *Não há arbitragens.*

(ii) *Existe uma medida de probabilidade $\mathbb{M}$, equivalente a $\mathbb{P}$, tal que $\{(\mathsf{s}_k, \mathcal{F}_k), k = 0, \ldots, n\}$ é um martingal sob $\mathbb{M}$.*

Além disso, se alguma dessas duas condições é válida então podemos escolher $\mathbb{M}$ de modo que $d\mathbb{M}/d\mathbb{P}$ é limitada. ▲

Termos da aula passada

- Carteira são conjuntos de d ativos. Elas são representadas por vetores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.
- Uma estratégia é uma família de carteiras $\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n$.
- As carteiras são compradas no início do $(k-1)$-ésimo período e vendidas no fim deste período.
- As estratégias são montadas a partir da informação disponível no momento: $\mathbf{x}_k$ é $\mathcal{F}_{k-1}$ mensurável.
- As estratégias são ligeiramente atrasadas com respeito aos preços: carteiras são processos *predictable*.

Termos da aula passada

- O ganho de uma estratégia $\mathbf{x}_k$, $k = 1, \ldots, n$ é

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_{k-1})' \mathbf{x}_k$$

ou seja, é a soma dos ganhos em cada período.

- Note que o ganho depende do cenário:

$$g(\mathbf{x}(\omega), \mathbf{s}(\omega)) = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{s}_k(\omega) - \mathbf{s}_{k-1}(\omega))' \mathbf{x}_k(\omega).$$

- Uma arbitragem é uma estratégia tal que
  (i) a probabilidade de perda é nula:

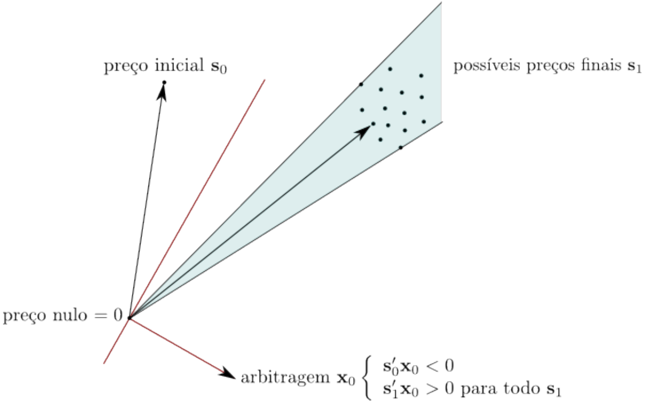
$$\mathbb{P}(g(\mathbf{x}, \mathbf{s}) < 0) = 0.$$

  (ii) a probabilidade de ganho é positiva:

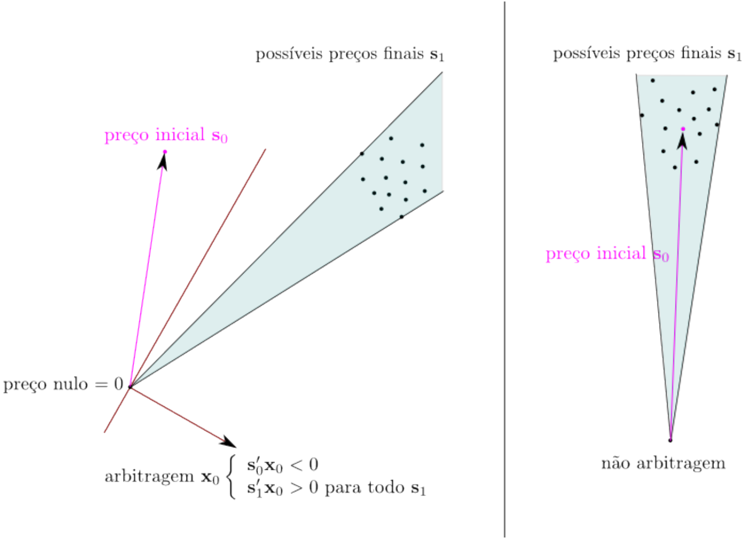
$$\mathbb{P}(g(\mathbf{x}, \mathbf{s}) > 0) > 0.$$

Arbitragem

- Uma arbitragem é uma estratégia que nos dá uma possibilidade de lucro sem chance de perda.
- Exemplo: preços $\mathbf{s} = (\mathrm{LTN}, \mathrm{LFT})'$, no espaço $\mathbb{S}$ de preços



Não arbitragem



Probabilidade

Uma medida de probabilidade em um conjunto finito $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ é uma atribuição de pesos $\mathbb{P}(\omega_i)$ a seus elementos de modo que

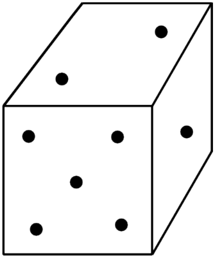
(i) $\mathbb{P}(\omega_i) \geq 0$.

(ii) $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\omega_i) = 1$.

$\Omega =$ faces de um dado

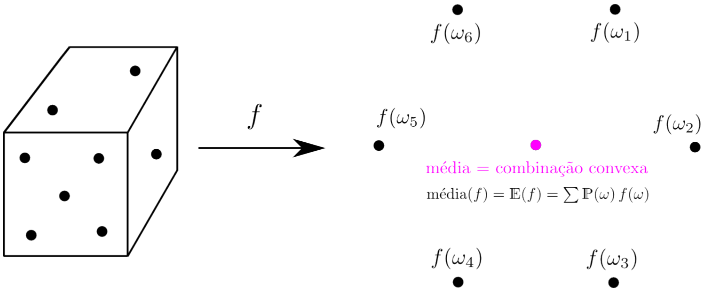
Exemplo: $\mathbb{P}(\omega_i) = 1/6$

Exemplo: $\mathbb{P}(\omega_i) = i/21$



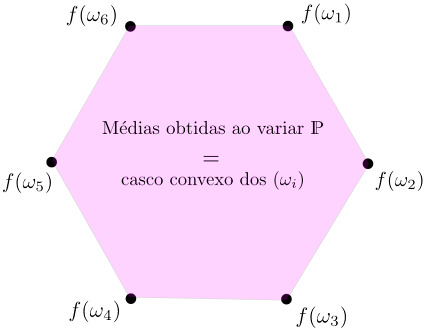
Média ou valor esperado

- $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ é um conjunto finito com uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$.
- V é um espaço vetorial e f é uma função de Ω para V.
- O valor esperado de f é a combinação convexa $\mathbb{E}(f) = \sum \mathbb{P}(\omega_i) f(\omega_i)$.

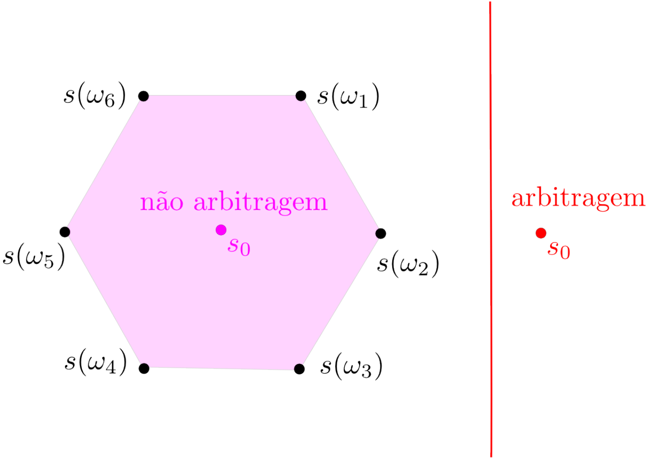


Média ou valor esperado

Ao variarmos a medida de probabilidade obtemos médias diferentes:

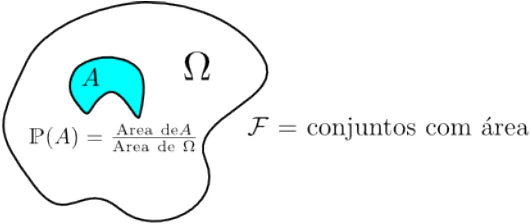


Média e arbitragem



Probabilidade em espaços amostrais infinitos

- Quando Ω é infinito os detalhes se complicam.
- Não dá mais para pensar só em $\mathbb{P}(\omega_i)$.
- Neste caso precisamos da sigma álgebra $\mathcal{F}$.
- Uma medida de probabilidade é uma função $\mathbb{P} : \mathcal{F} \mapsto [0,1]$ tal que $\mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ se os $A_n \in \mathcal{F}$ forem disjuntos.
- Probabilidade passa ser análoga a área.



É impossível atribuir área a todos subconjuntos de Ω!!!

Dalang, Morton & Willinger

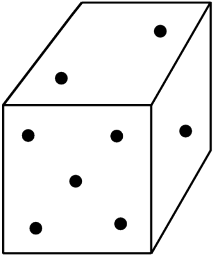
Teorema (Dalang, Morton & Willinger)

As duas afirmações a seguir são equivalentes:

(i) *Não há arbitragens.*

(ii) *Existe uma medida de probabilidade $\mathbb{M}$, equivalente a $\mathbb{P}$, tal que $\{(s_k, \mathcal{F}_k), k = 0, \ldots, n\}$ é um martingal sob $\mathbb{M}$.*

Além disso, se alguma dessas duas condições é válida então podemos escolher $\mathbb{M}$ de modo que $d\mathbb{M}/d\mathbb{P}$ é limitada. ▲



Dado honesto	Dado viciado
ω_6: $\mathbb{P}(\omega_6) = 1/6$	ω_6: $\mathbb{M}(\omega_6) = 1/4$
ω_1: $\mathbb{P}(\omega_1) = 1/6$	ω_1: $\mathbb{M}(\omega_1) = 1/12$
ω_5: $\mathbb{P}(\omega_5) = 1/6$	ω_5: $\mathbb{M}(\omega_5) = 1/4$
Média	Média
ω_2: $\mathbb{P}(\omega_2) = 1/6$	ω_2: $\mathbb{M}(\omega_2) = 1/12$
ω_4: $\mathbb{P}(\omega_4) = 1/6$	ω_4: $\mathbb{M}(\omega_4) = 1/4$
ω_3: $\mathbb{P}(\omega_3) = 1/6$	ω_3: $\mathbb{M}(\omega_3) = 1/12$

Derivada de Radon Nikodym

$$\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{P}}$$

ω_6: $\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{P}}(\omega_6) = \frac{3}{2}$

ω_1: $\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{P}}(\omega_1) = \frac{1}{2}$

ω_5: $\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{P}}(\omega_5) = \frac{3}{2}$

ω_2: $\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{P}}(\omega_2) = \frac{1}{2}$

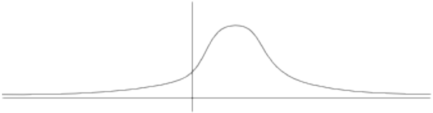
ω_4: $\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{P}}(\omega_4) = \frac{3}{2}$

ω_3: $\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{P}}(\omega_3) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{M}$ equivalente a $\mathbb{P}$:
$\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{P}}$ existe e é > 0.

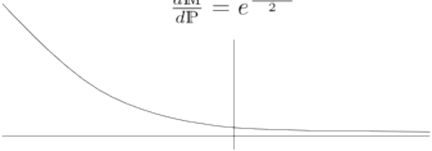
Medidas equivalentes: caso contínuo

$\mathbb{P}$: densidade $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$



$\mathbb{M}$: densidade $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{P}} = e^{\frac{1-2x}{2}}$$



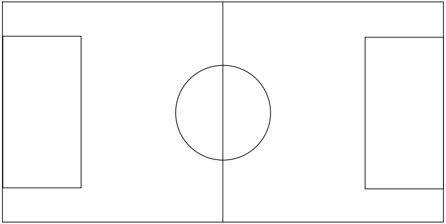
Martingal

Um martingal é um processo estocástico $\mathbf{s}_t : \Omega \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^d$ tal que

- $\mathbf{s}_t$ é adaptado a uma filtração $\mathcal{F}_t$
- $\mathbb{E}(|\mathbf{x}_t|) < \infty$ para todo $t \in [0, \infty)$.
- $\mathbb{E}(\mathbf{x}_t \,|\mathcal{F}_s\,) = x_s$ para $t > s$.

O conceito mais importante aqui é a probabilidade condicional $\mathbb{E}(\mathbf{x}_t \,|\mathcal{F}_s\,)$ de $\mathbf{x}_t$ com respeito à sigma algebra, que foi uma das mais brilhantes invenções de Kolmogorov.

Probabilidade condicional: Bayes



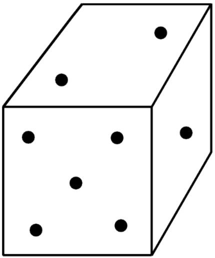
Evento $A =$ bola no campo esquerdo.
Evento $B =$ bola no círculo central.

$\mathbb{P}(A) = 1/2$ $\qquad$ $\mathbb{P}(B) =$ área do círculo / área do campo.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \text{(área do círculo/2) / área do campo}$$
$$= (1/2) \times \text{(área do círculo / área do campo)} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \Rightarrow \text{ independência.}$$

Probabilidade condicional: Kolmogorov



ω_6, $f = 6$	ω_1, $f = 1$	ω_6, $g = 4$	ω_1, $g = 3$
ω_5, $f = 5$	ω_2, $f = 2$	ω_5, $g = 3$	ω_2, $g = 4$
ω_4, $f = 4$	ω_3, $f = 3$	ω_4, $g = 4$	ω_3, $g = 3$

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, A, A^c\}$$

$$A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$$

$$A^c = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$$

$$f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

$$g = \mathbb{E}(f \,|\mathcal{F}\,) : \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

g é uma FUNÇÃO $\mathcal{F}$ mensurável

$$\mathbb{P}(A \,|\mathcal{F}\,) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \,|\mathcal{F}\,)$$

Dois teoremas sobre martingais

A seguir, $x : [0,\infty) \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$, $T : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ e $x_T(\omega) = x(T(\omega), \omega)$.

Teorema

Se o processo $x : [0,\infty) \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$ é martingal então para todo tempo de parada T tal que $T(\Omega)$ é finito temos que $\mathbb{E}(x_T) = \mathbb{E}(x_0)$. ▲

Teorema

Se o processo progressivo $x : [0,+\infty) \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$ é tal que

- $\mathbb{E}(|x_t|) < \infty$ *para todo* $t \in [0,\infty)$,
- $\mathbb{E}(x_T) = \mathbb{E}(x_0)$ *para todo tempo de parada tal que* $T(\Omega)$ *é finito* ,

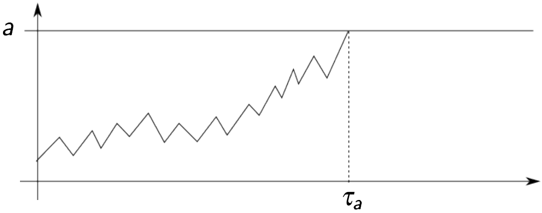
então x é martingal. ▲

1)progressivo é uma versão aprimorada de adaptado.

2) isto difere da visão usual, que lida com integrabilidade uniforme e continuidade à direita.

Tempos de parada

Um tempo de parada é uma estratégia, baseada nos dados disponíveis, sem bola de cristal, que define o momento de encerrarmos um processo



Exemplo: $\tau_a =$ parar ao atingir o preço alvo a.

Formalmente: $T : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ é um tempo de parada se, para todo t

$$\{ \omega \in \Omega \text{ com } T(\omega) \leq t \} \in \mathcal{F}_t .$$

Dalang, Morton & Willinger

Teorema (Dalang, Morton & Willinger)

As duas afirmações a seguir são equivalentes:

(i) *Não há arbitragens.*

(ii) *Existe uma medida de probabilidade $\mathbb{M}$, equivalente a $\mathbb{P}$, tal que $\{(\mathrm{s}_k, \mathcal{F}_k), k = 0, \ldots, n\}$ é um martingal sob $\mathbb{M}$.*

Além disso, se alguma dessas duas condições é válida então podemos escolher $\mathbb{M}$ de modo que $d\mathbb{M}/d\mathbb{P}$ é limitada. ▲

Resumo

Apresentei apenas uma visão intuitiva. Para mais que isso você precisa de:

- Um curso de probabilidade avançada com
  - Medida e integração.
  - Probabilidade condicional.
  - Tempo de parada.
  - Martingais.
- Um curso de análise funcional com
  - Espaços vetoriais abstratos ($\mathcal{L}^1$ e $\mathcal{L}^\infty$).
  - Dualidade.
  - O teorema de Hahn Banach.
- Interesse e gosto para digerir os cursos acima e saber relacionar o seu conteúdo com o que discutimos aqui.