Dalang, Morton & Willinger

Walter Mascarenhas

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
www.ime.usp.br/~walterfm

15/05/2012

Teorema

As duas afirmações a seguir são equivalentes:

(i) *Não há arbitragens.*

(ii) *Existe uma medida de probabilidade $\mathbb{M}$, equivalente a $\mathbb{P}$, tal que $\{(\mathbf{s}_k, \mathcal{F}_k), k = 0, \ldots, n\}$ é um martingal sob $\mathbb{M}$.*

Além disso, se alguma dessas duas condições é válida então podemos escolher $\mathbb{M}$ de modo que $d\mathbb{M}/d\mathbb{P}$ é limitada. ▲

Teorema

As duas afirmações a seguir são equivalentes:

(i) *Não há arbitragens.*

(ii) *Existe uma medida de probabilidade $\mathbb{M}$, equivalente a $\mathbb{P}$, tal que $\{(\mathbf{s}_k, \mathcal{F}_k), k = 0, \ldots, n\}$ é um martingal sob $\mathbb{M}$.*

Além disso, se alguma dessas duas condições é válida então podemos escolher $\mathbb{M}$ de modo que $d\mathbb{M}/d\mathbb{P}$ é limitada. ▲

Contexto

- Temos d ativos $\{a^1, \ldots, a^d\}$.
- Os preços $\mathbf{s} = (s^1, \ldots, s^d)'$ evoluem ao longo de $n+1$ instantes: $\{t_0, \ldots, t_n\}$. Ou seja, no instante t_k o vetor de preços será $\mathbf{s}_k$.

Convenções:

- Vetores em bold: $\mathbf{s}$.
- Os preços vivem no espaço $\mathbb{S}$ $(\approx \mathbb{R}^d)$.
- Indices de tempo abaixo: $\mathbf{s}_k =$ preços no instante k.
- Indices de coordenada acima: $\mathbf{s}^i =$ preço do i-ésimo ativo.
- Aspas indicam transposta:

$$\mathbf{s}' = \left(s^1, \ldots, s^d\right)' = \left(\begin{array}{c} s^1 \\ \vdots \\ s^d \end{array} \right).$$

Carteiras, estratégias e arbitragem

- "arbitrar" significa montar carteiras de ativos por preços baixos e vendê-la por preços altos.
- Uma carteira é um vetor com d coordenadas, $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^d)'$, onde a coordenada i indica a quantidade do ativo a^i na carteira.[1]
- Dalang, Morton & Willinger assumem que o arbitrador poder ficar short a vontade, ou seja, alguns x^i's podem ser negativos.
- Ou seja, as carteiras são vetores no espaço $\mathbb{X}$ $(\approx \mathbb{R}^d)$.

[1] Carteiras são denotadas por **x** por que achá-las é o xis da questão.

O Primeiro Exemplo

- Dois ativos a^1 = LFT0317 e a^2 = LTN0116. As carteiras são definidas por um par de números

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{quantas LFT's} \\ \text{quantas LTN's} \end{array}$$

Logo $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$.

- Para avaliar uma carteira precisamos de dois preços: um para a LFT e outro para a LTN. Logo, os preços também são pares de números

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s^1 \\ s^2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{preco de uma LFT} \\ \text{preco de uma LTN} \end{array}$$

e $\mathbb{S} = \mathbb{R}^2$. Porém, é "outro" $\mathbb{R}^2$, onde as entradas são preços, não quantidades.

O Primeiro Exemplo

- Multiplicando os preços $\mathbf{s} = (s^1, s^2)'$ pelas quantidades da carteira $\mathbf{x} = (x^1, x^2)'$ obtemos um número que indica o valor da carteira $\mathbf{x}$

$$\mathbf{s}'\mathbf{x} = s^1 x^1 + s^2 x^2$$

  se os preços vigentes forem $\mathbf{s}$.
- Matricialmente, isto também pode ser visto assim

$$\left(s^1, s^2\right) \left(\begin{array}{c} x^1 \\ x^2 \end{array} \right) = \left(s^1 x^1 + s^2 x^2\right)$$

  Por isto a notação $\mathbf{s}'\mathbf{x}$.
- No caso geral teríamos d ativos, cateiras $\mathbf{x} = \left(x^1, \ldots, x^d\right)'$, e preços $\mathbf{s} = \left(s^1, \ldots, s^d\right)'$ e o valor da carteira $\mathbf{x}$ segundo os preços $\mathbf{s}$ é

$$\mathbf{s}'\mathbf{x} = s^1 x^1 + s^2 x^2 + \cdots + s^d x^d.$$

Asset Pricing Theory = Álgebra Linear[2]

- Carteira = **vetor x** no espaço $\mathbb{X}$.
- Preços = **vetor s** no espaço $\mathbb{S}$.
- O valor da carteira **x** dados os preços **s** é $\mathbf{s}'\mathbf{x}$.
- Em matematiques: os preços são operadores lineares no espaço das carteiras: $\mathbb{S} \subset \mathbb{X}^*$.
- O valor de uma carteira é calculado via produto interno $\mathbf{s}'\mathbf{x}$.

[2] ou, parafraseando Larry Summers, Asset Pricing Theory = ketchup economics.

Suponhamos que há d ativos e $n+1$ vetores de preços $\mathbf{s}_k \in \mathbb{S}$, para $k = 0, 1 \ldots, n$, correspondendo a instantes $t_0, \ldots, t_n$. Então:

Teorema

As duas afirmações a seguir são equivalentes:

(i) *Não há arbitragens.*

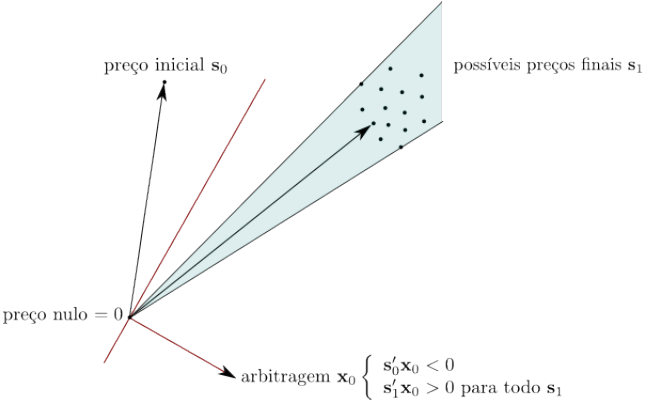
(ii) *Existe uma medida de probabilidade $\mathbb{M}$, equivalente a $\mathbb{P}$, tal que $\{(\mathbf{s}_k, \mathcal{F}_k), k = 0, \ldots, n\}$ é um martingal sob $\mathbb{M}$.*

Além disso, se alguma dessas duas condições é válida então podemos escolher $\mathbb{M}$ de modo que $d\mathbb{M}/d\mathbb{P}$ é limitada. ▲

Próxima parada: arbitragens.

Arbitragem

- Uma arbitragem é uma estratégia que nos dá uma possibilidade de lucro sem chance de perda.
- Exemplo: preços $\mathbf{s} = (\mathrm{LTN}, \mathrm{LFT})'$, no espaço $\mathbb{S}$ de preços [3]:



[3] Na verdade, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{X}$ e não $\mathbb{S}$ (quantidade $\neq$ moeda)

Arbitragem

- Suponhamos que há $n+1$ conjuntos de vetores de preços $S_k \subset \mathbb{S}$, para $k = 0, 1 \ldots, n$, correspondendo a instantes $t_0, \ldots, t_n$. Isto é S_k representa os possíveis preços no instante k.

- Uma estratégia é uma família de carteiras $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{X}$ onde cada $\mathbf{x}_k$ é definida a partir das informações disponíveis no instante t_{k-1}.

- Manteremos a carteira $\mathbf{x}_k$ durante o intervalo $[t_{k-1}, \ldots t_k)$. Ao fim deste intervalo ela será trocada por $\mathbf{x}_{k+1}$ e contabilizaremos o lucro (ou prejuízo) $(\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_{k-1})' \mathbf{x}_k$.

Arbitragem: primeira versão (será corrigida)

Uma estratégia $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ é uma arbitragem se

- Para todos preços $\mathbf{s}_0 \in S_0, \ldots, \mathbf{s}_n \in S_n$,

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_{k-1})' \mathbf{x}_k \geq 0.$$

- Há pelo menos uma família de preços $\mathbf{s}_0 \in S_0, \ldots, \mathbf{s}_n \in S_n$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_{k-1})' \mathbf{x}_k > 0.$$

Informação: visão intuitiva

- Uma estratégia é uma família de carteiras $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{X}$ onde cada $\mathbf{x}_k$ é definida a partir das informações disponíveis no instante t_{k-1}.
- Informação nos permite dizer se um possível evento passado ou corrente de fato ocorreu.
- Informação permite catalogar os eventos plausíveis.
- Exemplos de evento: "o preço subiu", "o preço caiu", "o preço despencou".
- Evento plausível $\approx$ cenário.

Informação: visão matemática

- O conjunto de todos os estados relevantes é chamado de Ω.
- Em estatística, Ω é chamado de espaço amostral, mas não há experimentos em finanças. Temos apenas uma amostra: o que aconteceu.
- Exemplo: possíveis preços para o contrato futuro de dólar amanhã:

$$\Omega = \{1700.0, 1700.5, \ldots, 2200.0\}.$$

- Exemplo: possíveis preços de DOL e DI (pares)

$$\Omega = \{(1700.0, 8.000), \ldots, (2200.0, 12.000)\}.$$

- Exemplo: use a sua imaginação e conhecimento.

Informação: visão matemática

- Matemáticos pensam em termos de conjuntos (desde o pré-primário...)
- Um evento é um subconjunto de Ω.
- Exemplo: $A =$ o IBovespa subiu. IBovespa ontem = 59.900

$$\Omega = \{50000, 50001, \ldots, 79999, 80000\}.$$

$$A = \{59901, 59902, \ldots, 79999, 80000\}.$$

- Exemplo: $B =$ o IBovespa despencou:

$$A = \{50000, 50001, \ldots, 54999\}.$$

- Intuição: "despencou". Formalismo: subconjunto de Ω representado pelo IBovespa abaixo de 55000.

Informação: visão matemática

- Intuição: ajuda a entender as coisas. Raras vezes ajuda a calcular.
- Formalismo: Importante para calcular. Dificilmente é entendido.
- O que fazer: chutar com as duas pernas!!!
  - Ao estudar o formalismo, procure entender a intuição por trás dele.
  - Ao pensar sobre o mundo, tente ver como o formalismo pode te ajudar.
  - Eu sei que falar é fácil e fazer é difícil. Mas vale a pena tentar.

Informação = Sigma Àlgebra

- σ-àlgebra é um modo consistente de tratar a ideia intuitiva de "evento".
- Uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω é uma σ-àlgebra se:
  - $\Omega \in \mathcal{A}$.
  - Se $A \in \mathcal{A}$ então $\Omega - A \in \mathcal{A}$.
  - Se $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ então $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.
- Intuição:
  - Com certeza, algumas das possibilidades possíveis (sic) vai ocorrer: $\Omega \in \mathcal{A}$.
  - Se eu sei dizer que algo ocorreu então eu também sei dizer se este algo não ocorreu.
  - Se eu sei julgar individualmente se cada uma das possibilidades $A_1, A_2, \dots$ ocorreu então eu também sei dizer se o conjunto formado por todas elas ocorreu.

Informação: Sigma Àlgebra

- Para entender o que é uma σ-àlgebra é necessário fazer alguns exemplos (dados, cartas, etc.)

- Faremos isto daqui a pouco.

- Por enquanto acredite que:

  σ-àlgebras representam informação.

Informação: Filtração

- Em finanças quantitativas, a informação disponível em um instante k é representada por uma σ-àlgebra $\mathcal{F}_k$, com $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{k+1}$.
- Essas famílias crescentes de σ-àlgebras são chamadas filtrações.

Teorema

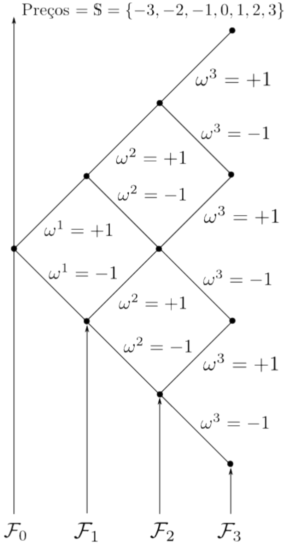
As duas afirmações a seguir são equivalentes:

(i) *Não há arbitragens.*

(ii) *Existe uma medida de probabilidade $\mathbb{M}$, equivalente a $\mathbb{P}$, tal que $\{(\mathbf{s}_k, \mathcal{F}_k), k = 0, \ldots, n\}$ é um martingal sob $\mathbb{M}$.*

Além disso, se alguma dessas duas condições é válida então podemos escolher $\mathbb{M}$ de modo que $d\mathbb{M}/d\mathbb{P}$ é limitada. ▲

Informação: Filtração



$$\Omega = \begin{cases} \omega_0 = (-1,\ -1,\ -1) \\ \omega_1 = (-1,\ -1,\ +1) \\ \omega_2 = (-1,\ +1,\ -1) \\ \omega_3 = (-1,\ +1,\ +1) \\ \omega_4 = (+1,\ -1,\ -1) \\ \omega_5 = (+1,\ -1,\ +1) \\ \omega_6 = (+1,\ +1,\ -1) \\ \omega_7 = (+1,\ +1,\ +1) \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$\mathcal{F}_1 = \begin{cases} \emptyset, \Omega \\ A_1 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\} \\ A_2 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_2 = \begin{cases} \emptyset, \Omega \\ A_1 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\} \\ A_2 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\} \\ A_3 = \{\omega_0, \omega_1\} \\ A_4 = \{\omega_2, \omega_3\} \\ A_5 = \{\omega_4, \omega_5\} \\ A_6 = \{\omega_6, \omega_7\} \\ A_7 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_4, \omega_5\} \\ A_8 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_6, \omega_7\} \\ A_9 = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\} \\ A_{10} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_6, \omega_7\} \\ A_{11} = \Omega - A_3,\ A_{12} = \Omega - A_4 \\ A_{13} = \Omega - A_5,\ A_{14} = \Omega - A_6 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_3 = \begin{cases} \emptyset, \Omega \\ A_1 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\} \\ A_2 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\} \\ A_3 = \{\omega_0, \omega_1\} \\ A_4 = \{\omega_2, \omega_3\} \\ A_5 = \{\omega_4, \omega_5\} \\ A_6 = \{\omega_6, \omega_7\} \\ A_7 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_4, \omega_5\} \\ A_8 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_6, \omega_7\} \\ A_9 = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\} \\ A_{10} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_6, \omega_7\} \\ A_{11} = \Omega - A_3,\ A_{12} = \Omega - A_4 \\ A_{13} = \Omega - A_5,\ A_{14} = \Omega - A_6 \\ A_{15} = \{\omega_0\},\ A_{17} = \{\omega_1\}, \\ A_{18} = \{\omega_2\},\ A_{19} = \{\omega_3\} \\ A_{20} = \{\omega_4\},\ A_{21} = \{\omega_5\}, \\ A_{22} = \{\omega_6\},\ A_{22} = \{\omega_7\} \\ A_{23}, A_{24}, \ldots, A_{61}, A_{62} \end{cases}$$

Informação: como se reflete nos preços

- A informação disponível no instante k é representada por uma σ-àlgebra $\mathcal{F}_k$, com $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{k+1}$.
- Essas famílias crescentes de σ-àlgebras são chamadas filtrações.
- Os preços $\mathbf{s}_k$ são adaptados à filtração $\mathcal{F}_k$.

Teorema

As duas afirmações a seguir são equivalentes:

(i) *Não há arbitragens.*

(ii) *Existe uma medida de probabilidade $\mathbb{M}$, equivalente a $\mathbb{P}$, tal que $\{(\mathbf{s}_k, \mathcal{F}_k), k = 0, \ldots, n\}$ é um martingal sob $\mathbb{M}$.*

Além disso, se alguma dessas duas condições é válida então podemos escolher $\mathbb{M}$ de modo que $d\mathbb{M}/d\mathbb{P}$ é limitada. ▲

Funções mensuráveis

Definição

Considere uma σ-àlgebra $\mathcal{F}$ em um espaço amostral Ω. Uma função $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ é mensurável se, para todo $y \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$f^{-1}(-\infty, y) = \{\, \omega \in \Omega \text{ com } f(\omega) < y \,\}$$

pertence a $\mathcal{F}$. ▲

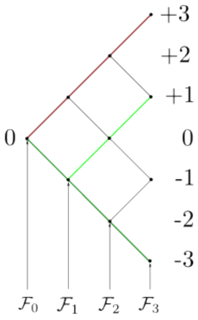
Intuitivamente

- Ω representa os possíveis estados do mercado.
- $\mathcal{F}$ representa a informação que temos sobre Ω.
- f é mensurável se puder ser calculada a partir da informação em $\mathcal{F}$.

Funções NÃO mensuráveis

- Um bom modo de entender o que é uma função mensurável é ver exemplos de funções NÃO mensuráveis.
- Nos próximos exemplos $\mathfrak{m}(\mathcal{F})$ representa a família de funções mensuráveis segundo $\mathcal{F}$.

Funções mensuráveis (ou NÃO): exemplos



$$\Omega = \begin{cases} \omega_0 = (-1,\ -1,\ -1) \\ \omega_1 = (-1,\ -1,\ +1) \\ \omega_2 = (-1,\ +1,\ -1) \\ \omega_3 = (-1,\ +1,\ +1) \\ \omega_4 = (+1,\ -1,\ -1) \\ \omega_5 = (+1,\ -1,\ +1) \\ \omega_6 = (+1,\ +1,\ -1) \\ \omega_7 = (+1,\ +1,\ +1) \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$\mathcal{F}_1 = \begin{cases} \emptyset, \Omega \\ A_1 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\} \\ A_2 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_2 = \begin{cases} \emptyset, \Omega \\ A_1 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\} \\ A_2 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\} \\ A_3 = \{\omega_0, \omega_1\} \\ A_4 = \{\omega_2, \omega_3\} \\ A_5 = \{\omega_4, \omega_5\} \\ A_6 = \{\omega_6, \omega_7\} \\ A_7 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_4, \omega_5\} \\ A_8 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_6, \omega_7\} \\ A_9 = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\} \\ A_{10} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_6, \omega_7\} \\ A_{11} = \Omega - A_3,\ A_{12} = \Omega - A_4 \\ A_{13} = \Omega - A_5,\ A_{14} = \Omega - A_6 \end{cases}$$

$s_0(\omega) = 0 \in \mathfrak{m}(\mathcal{F}_0)$ pois
1- se $y \leq 0$ então $\{\omega \in \Omega \text{ com } s_0(\omega) < y\} = \emptyset$.
2- se $y > 0$ então $\{\omega \in \Omega \text{ com } s_0(\omega) < y\} = \Omega$.

$s_2(\omega) = \omega^1 + \omega^2 \in \mathfrak{m}(\mathcal{F}_2)$ mas $s_2 \notin \mathfrak{m}(\mathcal{F}_1)$

$s_3(\omega) = \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 \in \mathfrak{m}(\mathcal{F}_3)$ mas $s_3 \notin \mathfrak{m}(\mathcal{F}_2)$

$s_1(\omega) = \omega^1 \in \mathfrak{m}(\mathcal{F}_1)$ mas $s_1 \notin \mathfrak{m}(\mathcal{F}_0)$ pois s_1 distingue ω_0 e ω_7 e $\mathcal{F}_0$ não faz tal distinção. Formalmente, para $y = 0$, $\{\omega \in \Omega \text{ com } f(\omega) < 0\} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_4\} \notin \mathcal{F}_0$.

Processos adaptados (consistentes com a informação)

- Considere um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$. Um função $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$, com $f(\omega) = \left(f^1(\omega), \ldots, f^d(\omega)\right)'$, é mensurável se cada uma das funções f^i for mensurável.
- Dada uma filtração $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_0, \ldots \mathcal{F}_n\}$, dizemos que uma família $\mathbf{s}_1, \ldots \mathbf{s}_n$ de funções de Ω para $\mathbb{R}^d$ é um processo adaptado à $\mathfrak{F}$ se $\mathbf{s}_k$ for $\mathcal{F}_k$-mensurável para todo k.
- Os preços $\mathbf{s}_0, \ldots, \mathbf{s}_n$ são adaptados à $\{\mathcal{F}_0, \ldots \mathcal{F}_n\}$.
- Uma estratégia é um processo $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x_n}$ adaptado a $\{\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_{n-1}\}$. Ou seja, $\mathbf{x}_k$ é $\mathcal{F}_{k-1}$-mensurável.
- Intuitivamente: devemos decidir o que comprar/vender antes de ver o próximo preço.

Ganhos e arbitragens

- O ganho de uma estratégia $\mathbf{x}_k$, dados preços $\mathbf{s}_k$ é

$$g(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbf{s}_k(\omega) - \mathbf{s}_{k-1}(\omega)\right)' \mathbf{x}_k(\omega),$$

ou seja, é o acúmulo dos ganhos obtidos em cada período.

- Uma estratégia é uma arbitragem se

$$\mathbb{P}(\{\,\omega \in \Omega \text{ tal que } g(\omega) < 0\,\}) = \mathbb{P}(g < 0) = 0$$

e

$$\mathbb{P}(\{\,\omega \in \Omega \text{ tal que } g(\omega) > 0\,\}) = \mathbb{P}(g > 0) > 0.$$

Resumo

- A informação disponível no instante k é representada por uma σ-àlgebra $\mathcal{F}_k$ de um conjunto Ω de possíveis estados do mercado.
- A família $\mathcal{F}_k$ satisfaz $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{k+1}$ e é chamada filtração.
- Os preços $\mathbf{s}_k$ são adaptados à filtração $\mathcal{F}_k$.
- Uma arbitragem é uma processo $\mathbf{x}_k$ adaptado à filtração $\mathcal{F}_{k-1}$ com risco zero de perda

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_{k-1})' \mathbf{x}_k \leq 0 \right) = 0$$

e probabilidade positiva de ganho

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_{k-1})' \mathbf{x}_k > 0 \right) > 0.$$

Resumo

Teorema

As duas afirmações a seguir são equivalentes:

(i) *Não há arbitragens.*

(ii) *Existe uma medida de probabilidade* $\mathbb{M}$*, equivalente a* $\mathbb{P}$*, tal que* $\{(\mathbf{s}_k, \mathcal{F}_k), k = 0, \ldots, n\}$ *é um martingal sob* $\mathbb{M}$.

Além disso, se alguma dessas duas condições é válida então podemos escolher $\mathbb{M}$ *de modo que* $d\mathbb{M}/d\mathbb{P}$ *é limitada.* ▲