2$^{\underline{a}}$ Prova de MAT3210 - Cálculo Diferencial e Integral II

IGC- 21/10/2019

B

Nome: ....
Assinatura: ....
RG: ....
Nº USP: ....
Professor: Edson Vargas ... Turma: 2019216 - Teórica ...

Q	**N**
1	
2	
3	
Total	

Escreva de forma organizada e clara, justificando suas respostas.

1$^{\underline{a}}$ Questão: Sejam $\vec{v} = \frac{1}{5}(3,4)$ e $f(x,y) = x\,|y|$, onde $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) (1,5 pontos) Caso exista, ache a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0)$. Caso não exista, justifique.

(b) (1,5 pontos) Verifique se f é ou não é diferenciável em $(0,0)$.

Solução.

a) A derivada direcional pedida é o limite abaixo, quando o mesmo existe.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(1-\frac{3}{5}\,t, \frac{4}{5}\,t) - f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{4\,|t|\,(1-\frac{3}{5}\,t)}{5\,t} = \lim_{t\to 0} \frac{4\,|t|\,(5-3\,t)}{25\,t}.$$

Vamos considerar os limites laterais à direita ($t>0$) e à esquerda ($t<0$).

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{4\,|t|\,(5-3\,t)}{25\,t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{4\,(5-3\,t)}{25} = \frac{20}{25}.$$

Por outro lado

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{4\,|t|\,(5-3\,t)}{25\,t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{-4\,(5-3\,t)}{25} = -\frac{20}{25}.$$

Como estes limites laterais são diferentes, o limite inicial não existe e a derivada direcional pedida também não existe.

b) Observamos que $f(x,0)=0$ e $f(0,y)=0$. Isto implica que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Então escrevemos

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y + R(x,y) = R(x,y),$$

e vamos examinar o limite abaixo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Como $0 \leq \left|\dfrac{x\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq |x|$, concluímos que este último limite é nulo. Seque portanto, pela definição, que f é diferenciável em $(0,0)$. $\square$

2ª Questão: Considere a função $f(x,y) = x^3 + 4xy + 3y^2 + 2y$.

(a) (1 ponto) Verifique que f é diferenciável em todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(b) (1 ponto) Ache uma equação para a reta tangente à curva de nível de f no ponto $(2,-1)$.

(c) (1 ponto) Ache o vetor unitário $\vec{v}$ de modo que a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,-1)$ seja máxima.

Solução.

a) Temos que as derivadas parciais de f existem em todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e são dadas por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 4y$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x + 6y + 2$. Estas derivadas são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e portanto, por um teorema visto em aula, a função f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

b) Calculamos o gradiente de f em $(2,-1)$ obtendo $\vec{\nabla} f(2,-1) = (8,4)$. Como sabemos, a reta tangente pedida é ortogonal a este vetor. Portanto, os pontos (x,y) desta reta satisfazem a equação $2x + y = 3$ ou $(x,y) = (2-t, -1+2t)$, onde $t \in \mathbb{R}$.

c) Como sabemos, o vetor unitário $\vec{v}$ que realiza a derivada direcional máxima é dado por $\mathbf{v} = \dfrac{\vec{\nabla} f(2,-1,)}{\|\nabla f(2,-1,)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(2,\,1)$. $\square$

3ª Questão: Considere uma função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e responda se as afirmações abaixo são **falsas** (nesse caso, exiba um contra-exemplo) ou **verdadeiras** (nesse caso, justifique claramente):

(a) (1 ponto) Se as derivadas parciais $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ existem, então a derivada direcional $\dfrac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0)$ existe, para todo o vetor unitário $\vec{v}$.

(b) (1 ponto) Se, para todo vetor unitário $\vec{v}$, a derivada direcional $\dfrac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0)$ existe, então g é diferenciável em $(0,0)$.

(c) (1 ponto) Se g é diferenciável em $(0,0)$ e o gradiente $\vec{\nabla} g(0,0) = (1,1)$, então a derivada direcional $\dfrac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0) = 2\alpha + \beta$, para todo vetor unitário $\vec{v} = (\alpha, \beta)$.

(d) (1 ponto) Se as derivadas parciais $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ existem, então g é contínua em $(0,0)$.

Solução.

a) A afirmação é falsa, pois a função $g(x,y) = \sqrt{|x|\,|y|}$, possui derivadas parciais em relação a x e y em $(0,0)$, são ambas nulas. Por outro lado, a derivada direcional correspondente ao vetor unitário $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ não existe por que $g(x,x) = |x|$ que não é derivável em $x = 0$.

b) A afirmação é falsa, pois $g(x,y) = \sqrt[3]{xy^2}$, para $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ unitário, a derivada direcional $\dfrac{\partial\, g}{\partial \vec{v}}(0,0) = \sqrt[3]{\alpha\beta^2}$, existe. Por outro lado g não é diferenciável em $(0,0)$ pois, se o fosse, pela regra da cadeia, deveria valer a igualdade $\vec{\nabla} g(0,0).\vec{v} = \dfrac{\partial\, g}{\partial \vec{v}}(0,0)$. Como as derivadas parciais em relação a x e y em $(0,0)$ são nulas, esta igualdade não ocorre. Conclui-se que g não é diferenciável em $(0,0)$.

c) A afirmação é falsa, pois pela regra da cadeia, se g é diferenciável em $(0,0)$, então vale a igualdade

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0) = \vec{\nabla} g(0,0).\vec{v} = (1,1).(\alpha,\beta) = \alpha + \beta.$$

d) A afirmação é falsa, pois $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, quando $(x,y) \neq (0,0)$ e $g(0,0) = 0$, possui derivadas parciais em relação a x e y em $(0,0)$, são ambas nulas. Por outro lado, g é decontínua em $(0,0)$ pois o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ não existe uma vez que $g(x,0) = 0$ e $g(x,x) = 1/2$.