MAT - 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II - Geologia
1ª Lista de Exercícios - 2019

1. Aplicações da Integral Definida

Exercícios

1. Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $f(x) = x^3 - 2x + 1$ e $g(x) = -x + 1$, com $-1 \leq x \leq 1$. (Resp.: $\frac{1}{2}$)

2. Desenhe a região $A = B \cap C \cap D$ e calcule a área de A, onde
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 4\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 12 - 3x^2\}$ e
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 3x^2 + 12x + 12\}$ (Resp.: $\frac{104}{3}$)

3. Desenhe a região $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 1,\ y \leq x + 1$ e $y \geq -x^2 - 3x - 2\}$ e calcule a sua área. (Resp.: $\frac{107}{24}$)

4. Sejam $f : [-1,3] \to \mathbb{R}$ contínua com $f(x) \leq 0$, para todo $x \in [-1,3]$,
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 3$ e $y \geq f(x)\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 3$ e $y \leq x^2 + 3\}$, tais que a área de $A \cap B$ seja igual a 23. Calcule $\int_{-1}^{3} f(x)dx$. (Resp.: $-\frac{5}{3}$)

5. Determine $m > 0$ para que a área delimitada por $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ e a reta $y = mx$ seja igual a 4. (Resp.: $m = 2$)

6. Desenhe a região do plano delimitada pela curva $y = x^3 - x$ e por sua reta tangente no ponto de abscissa $x = -1$. Calcule a área desta região. (Resp.: $\frac{27}{4}$)

7. Calcule $\int_0^1 (x + \sqrt{1 - x^2})dx$, interpretando-a como uma área. (Resp.: $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$)

8. Calcule $\int_{-1}^{1} x^3 \text{sen}\,(x^2 + 1)dx$. (Resp.: 0)

9. Encontre o volume de uma pirâmide cuja base é o quadrado de lado L e cuja altura é h.

10. Calcule o comprimento do gráfico de $f(x) = \ln(\cos x)$, para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
(Resp.: $\ln((1 + \sqrt{2}))$)

11. Calcule o comprimento da astróide cuja equação é $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. (Resp.: $6a$)

12. Calcule a área da região interna ao laço formado pela curva $y^2 = x^2(x + 3)$. (Resp.: $\frac{24}{5}\sqrt{3}$)

13. Dados $a, b > 0$, calcule a área da região do plano cartesiano limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
(Resp.: πab)

14. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto
a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 2,\ x^2 + y^2 \leq 5$ e $x > 0\}$
(Resp.: $\pi \left[\int_0^1 (5 - x^2)dx + \int_1^2 \frac{4}{x^2}dx + \int_2^{\sqrt{5}} (5 - x^2)dx \right] = \cdots$)
b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{x}$ e $(x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ (Resp.: $\frac{\pi}{6}$)
c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2$ e $e^{-x} \leq y \leq e^x\}$ (Resp.: $\frac{\pi}{2}(e^2 - e^{-2})^2$)

d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\, y \leq 1 \text{ e } 1/x \leq y \leq 4/x^2\}$ (Resp.: $\dfrac{5\pi}{6}$)

15. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = 3$, da região delimitada pelas parábolas $y = x$ e $y = 2 - x^2$. (Resp.: $\dfrac{32}{3}\pi$)

16. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \ln(x+1) + 2 \leq y \leq e^x + 4\}$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno da reta $y = 2$.
(Resp.: $\pi\left[\displaystyle\int_0^1 (e^x+2)^2dx - \int_0^1 \ln^2(x+1)dx\right] = \cdots$)

17. O disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ é girado em torno da reta $x = b$ $(b > a)$ para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado **toro**. Calcule seu volume. (**Sugestão:** Note que $\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}dy = \frac{\pi a^2}{2}$.) (Resp.: $(2\pi b)(\pi a^2)$)

18. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h, $(h \leq a)$ de uma esfera de raio a. (Resp.: $\pi\left(a - \dfrac{h}{3}\right)h^2$.

19. Determine o comprimento da curva $y = \cosh x$, $-3 \leq x \leq 4$. (Resp.: $\operatorname{senh}4 + \operatorname{senh}3$)

20. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h.

21. Desenhe a curva dada em coordenadas polares ρ e θ.

a. $\rho = e^{-\theta}\ \theta \geq 0$;
b. $\rho = \cos\theta$
c. $\rho\cos\theta = 1$; $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
d. $\rho = \cos 3\theta$
e. $\rho^2 = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^2\theta}$
f. $\rho = 1 - \operatorname{sen}\theta$

22. Passe a curva dada abaixo para coordenadas polares ρ e θ e a desenhe.

a. $x^4 - y^4 = 2xy$
b. $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$
c. $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2+y^2}$
d. $(x^2+y^2)^{3/2} = y^2$

23. Calcule a área da região limitada pela curva dada em coordenadas polares ρ e θ.

a. $\rho = 2 - \cos\theta$, (Resp.: $\dfrac{9\pi}{2}$)
b. $\rho^2 = \cos\theta$; $\rho \geq 0$, (Resp.: 1)
c. $\rho\cos 2\theta$, (Resp.: $\dfrac{\pi}{2}$)
d. $\rho = \cos 3\theta$, (Resp.: $\dfrac{\pi}{4}$)

24. Calcule a área da interseção das regiões limitadas pelas curvas dadas em coordenadas polares ρ e θ.

a. $\rho = \operatorname{sen}\theta$ e $\rho = 1 - \cos\theta$, (Resp.: $\frac{\pi-2}{2}$)
b. $\rho = 3$ e $\rho = 2(1 - \cos\theta)$, (Resp.: $7\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$)
c. $\rho^2 = \cos\theta$ e $\rho^2 = \operatorname{sen}\theta$; $\rho \geq 0$, (Resp.: $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$)
d. $\rho = 1$ e $\rho = 2(1 - \cos\theta)$, (Resp.: $\frac{8\pi}{3} - \frac{7\sqrt{3}}{2}$)

EXERCÍCIOS

1. Para cada função dada, determine o domínio e faça um esboço:

a. $f(x,y) = \sqrt{x-y}$; **b.** $f(x,y) = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$; **c.** $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$;

d. $f(x,y) = \tan(x-y)$; **e.** $f(x,y) = \dfrac{x}{y^x}$; **f.** $f(x,y) = \ln(xy^2 - x^3)$;

g. $f(x,y) = \ln(16 - 4x^2 - y^2)$.

2. Esboce uma família de curvas de nível das seguintes funções:

a. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$; **b.** $f(x,y) = x - \sqrt{1-y^2}$;

c. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2-y^2}$; **d.** $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$.

3. Encontre uma parametrização para a curva de nível k de f nos casos:

a. $f(x,y) = x + 2y - 3, k = -2$; **b.** $f(x,y) = x - \sqrt{1-2y^2}, k = 5$; **c.** $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-y^2}, k = 1$.

Determine a reta tangente às curvas acima nos pontos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(6,0)$ e $(\sqrt{2}, 1)$, respectivamente.

4. Esboce os gráficos de:

a. $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+1}$; **b.** $f(x,y) = \sqrt{x^2+9y^2}$; **c.** $f(x,y) = 4x^2 + y^2$;

d. $f(x,y) = y^2 - x^2$; **e.** $f(x,y) = y^2 + 1$; **f.** $f(x,y) = xy$;

g. $f(x,y) = \dfrac{1}{4x^2+9y^2}$; **h.** $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2}$; **i.** $f(x,y) = \ln(9x^2+y^2)$;

j. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$; **l.** $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$; **m.** $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$.

5. Seja $\gamma(t) = (e^t + 1, e^{-t})$, para $t \in \mathbb{R}$.

a. Desenhe a imagem de γ, indicando o sentido de percurso.

b. A imagem de γ estão contida numa curva de nível da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2y^2 - 2y - y^2 + 4$? Em caso afirmativo, em qual nível?

6. Em cada caso, esboce a superfície formada pelo conjunto dos pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que:

a. $x + 2y + 3z = 1$; **b.** $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$; **c.** $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;

d. $x^2 + y^2 - z^2 = -1$; **e.** $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; **f.** $x^2 - y^2 = 1$;

g. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

Alguma dessas superfícies é gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

7. Verifique que imagem da curva γ está contida na superfície S e faça um esboço dessa imagem.

a. $\gamma(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2}\sin t)$, $t \in [0, \pi[$ e S é uma esfera com centro em $(0,0,0)$;

b. $\gamma(t) = (\sqrt{t^2+1}\cos t, \sqrt{t^2+1}\sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$;

c. $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, \sqrt{t^2+4})$, $t \geq 0$ e S é o gráfico de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4}$.

8. Sejam $\gamma(t) = (2 - \cos t, \sec^2 t + 3)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ e $f(x,y) = ((x-2)^2(y-3))^{\frac{2}{3}} + 1$. Esboce a imagem de γ. Mostre que essa imagem está contida em uma curva de nível de f e indique qual é o nível.

9. Sejam $g(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2 + 1$ e $\Gamma(t) = (2-t, 3+t, z(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Sabendo que a imagem (trajetória) de Γ está contida no gráfico de g, encontre $z(t)$. Esboce ainda a imagem de Γ.

10. Desenhe a imagem de cada uma das seguintes curvas:

a. $\gamma(t) = (1, t, 1)$;
b. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2)$;
c. $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t}), t \geq 0$;
d. $\gamma(t) = (t, \cos t, \sin t), t \geq 0$;
e. $\gamma(t) = (\sin t, \sin t, \sqrt{2}\cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$;
f. $\gamma(t) = (1 + \sin t, 1 + \sin t, \cos t)$.

11. Em cada caso, encontre uma parametrização para C e para a reta tangente a C no ponto P:

a. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z = x + 1\}$ e $P = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.
b. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$ e $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.
c. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y^2 - x^2 \text{ e } x^2 + y^2 = 1\}$ e $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.
d. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2z^2 = 1 \text{ e } y = 2z + 1\}$ e $P = (-\sqrt{2}, -1, -1)$.
e. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ e } x^2 + y^2 = z\}$ e $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
f. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{4x^2 + y^2} \text{ e } z = 2x + 1\}$ e $P = (0, 1, 1)$.

12. Seja $f(x,y) = \dfrac{2x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2 + 1}$.

a. Esboce as curvas de nível de f dos níveis $c = 1$, $c = 2$ e $c = 3$.
b. Encontre uma curva derivável γ, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, cuja imagem seja a curva de nível de f do nível $c = 1$.
c. Determine o vetor tangente à curva γ, que você encontrou no item anterior, no ponto $(-1, 0)$.
d. Seja $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\Gamma(t) = (\sin t, \cos t, z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de f, encontre o vetor tangente a Γ em $\Gamma(\frac{\pi}{3})$.

RESPOSTAS

1 **a.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x\}$;
b. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$;
c. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$;
d. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x + \frac{1+2k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
e. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$;
f. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(y-x)(y+x) > 0\}$;
g. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 < 16\}$.

2 **a.** $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}(1-t)), t \in \mathbb{R}$
$X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + \lambda(2, -1), \lambda \in \mathbb{R}$
b. $\gamma(t) = (5 + \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t), t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$X = (6, 0) + \lambda(0, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
c. $\gamma(t) = (\sec t, \tan t), t \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$
$X = (\sqrt{2}, 1) + \lambda(\sqrt{2}, 2), \lambda \in \mathbb{R}$
d. $k = 1$: elipse; $k = 2$: um par de retas paralelas; $k = 3$: uma hipérbole.

5 **b.** Sim, no nível 5.

6 Apenas a superfície do item **a.**

8 no nível 2.

9 $z(t) = 2t^2 + 1$.

11 **a.** $\gamma(t) = \frac{1}{2}(\cos t - 1, \sqrt{2}\sin t, \cos t + 1), t \in [0, 2\pi[$
$X = (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) + \lambda(-1, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}$;
b. $\gamma(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos t, \sqrt{2}\sin t, \cos t + 1), t \in [0, 2\pi[$
$X = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) + \lambda(1, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}$;
c. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, -\cos(2t)), t \in [0, 2\pi[$
$X = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) + \lambda(-1, 1, 2\sqrt{2}), \lambda \in \mathbb{R}$;
d. $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, -1 + 2\sin t, -1 + \sin t), t \in [0, 2\pi[$
$X = (-\sqrt{2}, -1, -1) + \lambda(0, 2, 1), \lambda \in \mathbb{R}$;
e. $\gamma(t) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t), t \in [0, 2\pi[$
$X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \lambda(1, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R}$;
f. $\gamma(t) = (\frac{1}{4}(t^2 - 1), t, \frac{1}{2}(t^2 + 1))$, $t \in \mathbb{R}$
$X = (0, 1, 1) + \lambda(1, 2, 2), \lambda \in \mathbb{R}$.

12 **a.** $c = 1$: $x^2 + 3y^2 = 1$; $c = 2$: $y = 1$ e $y = -1$; $c = 3$: $-\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = 1$;
b. $\gamma(t) = (\sin t, \frac{\cos t}{\sqrt{3}}), t \in [0, 2\pi]$;
c. $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$;
d. $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

EXERCÍCIOS

1. Calcule os seguintes limites, caso existam. Justifique quando não existirem:

a. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$; **b.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

c. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$; **d.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$;

e. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$; **f.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$;

g. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y}$; **h.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4\,\sin(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$;

i. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$; **j.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$;

k. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$; **l.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\sin(x^2+y^2)}{y^4+\sin(x^2+y^2)}$;

m. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4+x^5\sqrt[3]{y^4}}{x^6+y^8}$; **n.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(1-\cos(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^3}$.

2. Decida se os limites abaixo existem, determinando seu valor em caso afirmativo:

a. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$; **b.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$;

c. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\ln(3x^2+y^2)\arctan\left(\frac{1}{y^2-x^2}\right)$; **d.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2\ln(3x^2+y^2)\arctan\left(\frac{1}{y^2-x^2}\right)$.

3. Determine os pontos de continuidade da seguinte função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)[(x-1)^2+(y-1)^2]}, \text{ se } (x,y)\neq(0,0) \text{ e } (x,y)\neq(1,1);\\ 1, \text{ se } (x,y)=(0,0);\\ 0, \text{ se } (x,y)=(1,1).\end{cases}$$

4. Seja

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4}{x^4+y^2}\sin\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right), \text{ se } (x,y)\neq(0,0);\\ L, \text{ se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Existe algum número real L para o qual f seja contínua em $(0,0)$? Justifique.

5. Seja $f(x,y)=\dfrac{3(x-1)^2+(y-1)^2}{x^2-y^2}$.

a. Num mesmo sistema de coordenadas, esboce as curvas de nível de f nos níveis $k=1$ e $k=3$.

b. Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$? *Justifique.*

RESPOSTAS

1 **a.** não existe; **b.** 0; **c.** 0; **d.** não existe; **e.** não existe; **f.** não existe **g.** não existe; **h.** 0; **i.** 0; **j.** 0; **k.** não existe; **l.** 1; **m.** não existe; **n.** 0.

2 **a.** 1; **b.** 0; **c.** 0; **d.** não existe.
3 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\neq(0,0)\}$.
4 $L=0$.
5 O limite não existe.

EXERCÍCIOS

1. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das funções:

(a) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (b) $f(x,y) = \ln(1+\cos^2(xy^3))$

2. Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\, \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(x^2y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.
Sugestão: Neste caso, usar a definição de derivada parcial é menos trabalhoso do que aplicar as regras de derivação.

3. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

4. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

(b) f é contínua em (0,0)?

(c) f é diferenciável em (0,0)?

5. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é contínua em (0,0).

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) É f diferenciável em $(0,0)$?

(d) São $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0,0)$?

6. Seja $g(x,y) = \sqrt[3]{3x^4+2y^4}$. Mostre que g é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.

7. Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde f **não** é diferenciável, sendo:

(a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ (b) $f(x,y) = x|y|$

(c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^4+y^4}}$ (d) $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$

8. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

(a) $z = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$, no ponto $(0,0,1)$ (b) $z = \mathrm{e}^x \ln(\frac{y}{2})$, no ponto $(3,2,0)$

9. Mostre que os gráficos das funções $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e $g(x,y) = \frac{1}{10}(x^2+y^2) + \frac{5}{2}$ se intersectam no ponto $(3,4,5)$ e têm o mesmo plano tangente nesse ponto.

10. Determine uma equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y) = x^3y$. Existe um só plano?

11. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \ln(x^2+ky^2)$ no ponto $(2,1,f(2,1))$ seja perpendicular ao plano $3x+z=0$.

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z = xf\left(\dfrac{x}{y}\right)$ passam pela origem.

5. Informações gerais

Bibliografia Sugerida

(1) Hamilton L. Guidorizzi; *Um Curso de Cálculo, vol. 1 cap. 13*.
(2) Hamilton L. Guidorizzi; *Um Curso de Cálculo, vol. 2 cap. 9 a 16*.

OU

(3) James Stewart; *Cálculo , vol. 1, cap. 6*.
(4) James Stewart; *Cálculo , vol. 2, cap. 13 e 14*.

Monitoria.

(1) Monitor: Caue Almeida Costa
(2) Email: cauecosta@usp.br
(3) Horário: Segundas e Quintas Feiras das 12h às 13h
(4) Local: Auditório A3

Avaliação -
A média final (MF1) será a média de 3 provas: $P1$, $P2$ e $P3$. Haverá uma prova substitutiva (SUB) apenas para quem deixar de fazer uma das provas $P1$, $P2$, ou $P3$. MF1 ≥ 5 e frequência $\geq 70\%$ indica aprovação, $3 \leq MF1 < 5$ e frequência $\geq 70\%$ dará direito a uma prova de recuperação (REC), MF1 < 3 ou frequência $< 70\%$ indica reprovação. Àqueles que fizerem a REC terão uma segunda média final (MF2) que será a média de MF1 e REC. MF2 ≥ 5 indica aprovação e $MF2 < 5$ indica reprovação.

Prova	**Data**
$P1$	19/09/19
$P2$	21/10/19
$P3$	21/11/19
SUB	28/11/19 Fechada
REC	a ser marcada em Janeiro ou Fevereiro de 2020.