A SÉRIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{e^n n!}$ CONVERGE CONDICIONALMENTE

O argumento usado no primeiro lema abaixo é muito parecido com o que fizemos em sala para demonstrar que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$. Aqui, em vez de somarmos uma PG com um número arbitrário de termos, usamos apenas que $\dfrac{1+t^3}{1+t} = 1 - t + t^2$.

`Lema 1` Para todo $x > 0$, a desigualdade $1 - \dfrac{x}{2} < \dfrac{\log(1+x)}{x} < 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3}$ é satisfeita.

`Demonstração`: Para todo $t > -1$, temos

$$1 - t < \frac{1}{1+t} < 1 - t + t^2 \tag{1}$$

(isso se vê dividindo-se por $1+t$ a desigualdade $1 - t^2 < 1 < 1 + t^3$). Dado $x > 0$, integrando-se (1) de 0 a x, vem:

$$\int_0^x (1-t)\,dt < \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt < \int_0^x (1 - t + t^2)\,dt,$$

logo

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Para obter o que queremos, basta dividir por x. $\square$

Vamos agora repetir um argumento que usamos na nota sobre a constante de Euler. A melhor maneira de nos convencermos da validade do enunciado do lema seguinte é desenhando, acima do gráfico da função $1/x$, entre 1 e n, os retângulos de lado 1 que aproximam por excesso a área sob o gráfico, que é igual a $\log n$.

`Lema 2` Para todo inteiro $n > 2$, a desigualdade $1 - \log 2 < \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \log n < 1$ é satisfeita.

`Demonstração`: Definamos, para cada inteiro $n \geq 2$,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad x_n = s_n - \log n.$$

Queremos mostrar que $1 - \log 2 < x_n < 1$ para todo $n > 2$.

Temos

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n} - [\log(n+1) - \log n] = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt > 0$$

(vale esta última desigualdade pois $\frac{1}{t} < \frac{1}{n}$ se $n < t \leq n+1$). Sendo a sequência x_n crescente, vem que $x_n > x_2 = 1 - \log 2$, para todo $n > 2$. Além disso, temos

$$s_n - \log n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{t}\,dt =$$

$$\left(1-\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt\right)+\left(\frac{1}{2}-\int_2^3 \frac{1}{t}\,dt\right)+\left(\frac{1}{3}-\int_3^4 \frac{1}{t}\,dt\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\int_{n-1}^n \frac{1}{t}\,dt\right)<$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}<1$$

(na penúltima desigualdade, usamos, para cada j de 1 até $n-1$, que $\int_j^{j+1}\frac{1}{t}\,dt>\frac{1}{j+1}$, o que é válido pois $\frac{1}{t}>\frac{1}{j+1}$ quando $j\le t<j+1$). □

O objetivo principal desta nota é provar que existem constantes positivas c e d tais que, para todo n inteiro positivo a desigualdade

$$\frac{c}{\sqrt{n}}<\frac{n^n}{e^n n!}<\frac{d}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

é satisfeita (daí seguirá facilmente a afirmação sobre a série do título).

Para estimarmos o logaritmo da expressão no meio de (2), precisamos escrever a soma em

$$\log n! = \log n + \log(n-1) + \log(n-2) + \cdots + \log 3 + \log 2,\ \ n\ge 2,$$

de uma maneira conveniente. O truque será substituir, para cada j de 2 até n, $\log j$ por $j\log j-(j-1)\log j$ e, depois, usar a associatividade da adição. Aqui vamos:

$$\log n! = n\log n-(n-1)\log n+(n-1)\log(n-1)-(n-2)\log(n-1)+$$

$$+(n-2)\log(n-2)-(n-3)\log(n-2)+\cdots+3\log 3-2\log 3+2\log 2-\log 2=$$

$$n\log n-\left[(n-1)\log\frac{n}{n-1}+(n-2)\log\frac{n-1}{n-2}+\cdots+2\log\frac{3}{2}+1\log\frac{2}{1}\right]=$$

$$n\log n-\sum_{k=1}^{n-1} k\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

e, daí,

$$\log\frac{n^n}{n!}=\sum_{k=1}^{n-1} k\log\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Segue do Lema 1, com $x=\frac{1}{k}$, que cada termo deste somatório satisfaz

$$1-\frac{1}{2k}<k\log\left(1+\frac{1}{k}\right)<1-\frac{1}{2k}+\frac{1}{3k^2}.$$

Daí, vem, para todo $n\ge 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{2k}\right)<\log\frac{n^n}{n!}<\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{2k}+\frac{1}{3k^2}\right). \tag{3}$$

O termo mais à esquerda de (3) satisfaz

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{2k}\right)=(n-1)-\frac{s_n}{2}=(n-1)-\frac{s_n-\log n}{2}-\frac{\log n}{2},$$

enquanto que o termo mais à direita satisfaz

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{2k}+\frac{1}{3k^2}\right)=(n-1)-\frac{s_n-\log n}{2}-\frac{\log n}{2}+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}.$$

Segue do Lema 2 que, para todo $n>2$,

$$-\frac{1}{2}<-\frac{s_n-\log n}{2}<-\frac{1-\log 2}{2}.$$

Além disto, vimos em sala que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}<2$, para todo inteiro positivo n. Substituindo tudo isso em (3), vem:

$$-\frac{1}{2}+(n-1)-\frac{\log n}{2}<\log\frac{n^n}{n!}<(n-1)-\frac{1-\log 2}{2}-\frac{\log n}{2}+\frac{1}{6},$$

ou seja,

$$n-\frac{3}{2}+\log\frac{1}{\sqrt{n}}<\log\frac{n^n}{n!}<n-\frac{5}{6}+\log\sqrt{2}+\log\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Tomando a exponencial (que é crescente) dos três membros da estimativa acima, vem:

$$e^{-\frac{3}{2}}\frac{e^n}{\sqrt{n}}<\frac{n^n}{n!}<e^{-\frac{5}{6}}\sqrt{2}\frac{e^n}{\sqrt{n}},$$

o que prova (2), para $n>2$, com $c=e^{-\frac{3}{2}}=0,223...$ e $d=e^{-\frac{5}{6}}\sqrt{2}=0,614...$. É fácil verificar que estas constantes c e d que acabamos de escolher fazem (2) verdadeira também para $n=1$ ou $n=2$, mas isso não é relevante para a aplicação que vamos dar dessa estimativa.

É possível provar (mas não vamos fazer isto aqui) que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=0,398...\ .$$

Esta é a chamada *fórmula de Stirling*.

Definamos agora $a_n=\dfrac{n^n}{e^n n!}$. Segue da desigualdade mais à esquerda em (2) que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Além disso, temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}<1;$$

isto é, a sequência a_n é decrescente. Segue então do critério de Leibniz para séries alternadas, que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.

Segue da desigualdade mais à direita em (2) e do fato de que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge.

Em suma, provamos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^n}{e^n n!}$ é condicionalmente convergente.