MAT0450 – IME-USP – 1° Semestre de 2013 – Sétima Lista

(**1**) Seja γ a aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.
(a) Mostre que, se $\gamma(t) = (x, y)$, então $x \neq -1$ e $t = y/(x+1)$.
(b) Mostre que γ é injetora e que sua imagem é igual a $\{(x, y);\, x^2 + y^2 = 1, (x, y) \neq (-1, 0)\}$.
(c) Encontre todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ tais que $x^2 + y^2 = 1$.

(**2**) (a) Verifique que $T(x, y) = (x + y, x - y)$ define uma bijeção do círculo $x^2 + y^2 = 1$ no círculo $x^2 + y^2 = 2$.
(b) Encontre todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ tais que $x^2 + y^2 = 2$.
(c) Mostre que existem infinitos triângulos retângulos, dois-a-dois não semelhantes, cujos catetos medem a e b e cuja hipotenusa mede $c\sqrt{2}$, sendo a, b e c inteiros (por exemplo, podemos tomar $a = b = c = 1$ ou $(a, b, c) = (7, 1, 5)$.

(**3**) Seja k um inteiro positivo que se escreve como a soma de dois quadrados, $k = a^2 + b^2$, a e b inteiros não-negativos. Mostre que existem infinitos $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ satisfazendo $x^2 + y^2 = k$. Mais precisamente, mostre que existe um isomorfismo linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ para todo $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ e tal que $x^2 + y^2 = 1$ se, e somente se, $(x', y') = T(x, y)$ satisfaz $(x')^2 + (y')^2 = k$.

Dica: Usandos números complexos, note que $x^2 + y^2 = k \iff \dfrac{(x+iy)}{(a+ib)}\dfrac{(x-iy)}{(a-ib)} = 1$.

`Observação`: É possível mostrar que se, k não puder ser escrito como a soma de dois inteiros, então a intereseção entre $\mathbb{Q}^2$ e o círculo $x^2 + y^2 = k$ será vazia. Para isso é preciso usar dois resultados clássicos da Teoria dos Números: (1) todo inteiro positivo k que não se escreve como a soma de dois quadrados é da forma $k = p_1.p_2.\cdots.p_l(a^2 + b^2)$, onde $p_1, p_2, \cdots, p_l$ são primos distintos e côngruos a 3 (mod 4) e a e b são inteiros não-negativos (este é um teorema de Fermat, veja por exemplo o Teorema IV.1.6 em *Elementos de Álgebra*, de Arnaldo Garcia e Yves Lequain) e (2) todo elemento do anel $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi;\, a$ e $b \in \mathbb{Z}\}$ pode ser fatorado como um produto de "primos" (isto é, elementos do anel que não podem ser escritos como o produto de dois elementos diferentes de 1, -1, i, $-i$); além disso, a fatoração é única a menos de permutação ou multiplicação por ± 1 ou $\pm i$ (veja por exemplo o Teorema 14.10 em *Elementary Number Theory & its applications*, de Kenneth H. Rosen).

(**4**) Sejam O a origem de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no plano, $Q = (-1, 0)$ e $P = (x, y)$ um ponto do círculo $x^2 + y^2 = 1$, $P \neq Q$. Sejam θ e φ ângulos-com-sinal determinados com o eixo das abscissas, da maneira usual, pelos segmentos $\overline{QP}$ e $\overline{OP}$, respectivamente (isto é, $\theta = \varphi = 0$ se $P = (1, 0)$, θ e φ têm o mesmo sinal que y, $|\theta| < \pi/2$ e $|\varphi| < \pi$). Mostre que $\tan\theta = y/(x + 1)$ e daí use os resultados da primeira questão para expressar o seno e o cosseno de φ em função de $\tan(\varphi/2)$.

(**5**) Seja a uma constante positiva.
(a) Esboce o gráfico das funções $f(t) = 3at/(1 + t^3)$ e $g(t) = 3at^2/(1 + t^3)$, ambas definidas para $t \neq -1$.
(b) Calcule $\lim\limits_{t\to -1}(f(t) + g(t))$.
(c) Defina $\gamma(t) = (f(t), g(t))$, $t \neq -1$. Verifique que a imagem da aplicação $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \ni t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ coincide com a curva de equação cartesiana $x^3 + y^3 = 3axy$ (conhecida como o *folium de Descartes*) e esboce seu gráfico.
(d) Encontre as coordenas dos pontos do folium de Descartes nos quais a reta tangente é horizontal, ou é vertical, ou tem coeficiente angular igual a -1.

(**6**) Seja ℓ uma constante positiva.
(a) Esboce o gráfico da curva de equação $x^{2/3} + y^{2/3} = \ell^{2/3}$ (conhecida como *astroide*).
(b) Dado um ponto (x_0, y_0) com ambas coordenadas não-nulas no astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = \ell^{2/3}$, verifique que a reta tangente à curva nesse ponto determina com os eixos coordenados um segmento de comprimento ℓ.

(**7**) O terreno de uma casa é delimitado por um muro de lados paralelos às suas paredes. Suponha que uma das paredes da casa está a uma distância a do muro, que tem altura b. Suponha também que essa parede é alta o suficiente (ou que o muro é baixo o suficiente) para que seja possível uma escada suficientemente longa ter sua extremidade inferior no chão, fora do terreno da casa, e sua extremidade superior apoiada na parede. Mostre que a escada mais curta que pode ser colocada nessa posição tem comprimento $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.

(**8**) Dois corredores, um de largura a e o outro de largura b, formam uma esquina em ângulo reto. Deseja-se arrastar uma barra metálica pesada de espessura desprezível, sem que ela saia do chão, de um corredor para o outro. Mostre que a maior barra que pode dobrar a esquina desse jeito tem comprimento $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.

(**9**) Encontre o valor de a para o qual reta $y = x$ é tangente à curva $y = a^x$. (**10**) Quem é maior, e^π ou π^e?