

MAT0450 - SEMINÁRIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
IME-USP, 1º SEMESTRE DE 2013
QUARTA LISTA

- (1) Mostre que, se n é um natural maior que 1, então $n^4 + 4$ não é primo.
- (1') Mostre que, se n é um natural e se k é um ímpar maior que 1, então $n^4 + 4^k$ não é primo.
- (2) Sejam n e m naturais tais que 13 não divide $5n+3m$. Mostre que 13 não divide $4n+5m$.
- (2') Dados n e m naturais, mostre que 13 divide $2n+7m$ se, e somente se, 13 divide $n+10m$.
- (3) Mostre que, para todo natural $n > 1$, $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$ não é inteiro.

- (4) Mostre que, se a é um real positivo e se n é um natural, então vale a desigualdade

$$a^n + \frac{1}{a^n} - 2 \geq n^2 \left(a + \frac{1}{a} - 2 \right)$$

- (5) Calcule o valor da soma $1!1 + 2!2 + 3!3 + \dots + n!n$ para alguns valores de n . Descubra a fórmula geral para n arbitrário e demonstre que ela é válida.

- (6) Determine um número natural cuja divisão por 2 tem resto 1, cuja divisão por 3 tem resto 2, cuja divisão por 4 tem resto 3, cuja divisão por 5 tem resto 4 e cuja divisão por 6 tem resto 5, cuja divisão por 7 tem resto 0.

- (6') Dado um primo n maior que 1, mostre que existem infinitos inteiros k tais que, para cada inteiro m maior que 1 e menor que n , o resto da divisão de k por m é $m-1$ e, além disso, k é múltiplo de n .

- (7) Seja $f: \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ função tal que $f(n+1) > f(f(n))$ para todo n . Mostre que $f(n) = n$ para todo n .

- (8) É dada uma lista com os inteiros de 0 a 100 numa ordem qualquer. Mostre que é possível riscar 90 números da lista de modo que os demais fiquem em ordem crescente ou decrescente.

- (9) Os números inteiros de 1 a 1.000 estão dispostos em ordem em volta de um círculo (isto é, o número 1 está entre 1.000 e 2, o número 1.000 está entre 999 e 1 e, se n é maior que 1 e menor que 1.000, então n está entre $n-1$ e $n+1$). A partir de 1, risca-se todo 14º número (1, 15, 29, 43,...). Só se pára de riscar números quando se atinge um número já riscado. Quando números restarão sem serem riscados?

- (10) Descubra onde está o erro da seguinte “demonstração”. Seja a um real positivo. A igualdade $a^{n-1} = 1$ é válida para $n = 1$. Suponhamos que n é tal que $a^{k-1} = 1$ para todo $k \leq n$. Então temos

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

Segue portanto do Princípio de Indução que $a^{n-1} = 1$ para todo natural n .

ALGUMAS SOLUÇÕES

(3) Em vez de simplesmente demonstrar o que se pede, vou usar este caso para exemplificar uma estratégia de resolução. Talvez minha história não pareça tão plausível quanto os casos de Polya, mas este é aproximadamente o relato dos passos que eu segui para resolver o problema. Fica para o leitor a tarefa de escrever uma solução enxuta, que vá direto ao ponto.

Nosso plano é supor que

$$(1) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = S_n$$

é inteiro e usar propriedades de divisibilidade ou fatoração para chegar a um absurdo.

Para transformar (1) em uma equação envolvendo apenas números inteiros, multipliquemo-la por $n!$:

$$(2) \quad n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + \cdots + \frac{n!}{n} = n!S_n$$

Para cada k entre 1 e n , $n!/k$ é o produto de todos os inteiros de 1 a n , exceto k . Claro que todo k que satisfaça $1 \leq k \leq n$ divide todas as parcelas dos dois membros de (2), exceto, possivelmente, $n!/k$. No caso em que n é primo, n não divide $n!/n$, pois n não divide nenhum dos termos do produto $2 \cdot 3 \cdots (n-1)$ e para um primo dividir um produto de inteiros ele tem de necessariamente dividir algum dos fatores. Assim chegamos, no caso em que n é primo, ao seguinte absurdo: o lado direito da equação

$$\frac{n!}{n} = n!S_n - n! - \frac{n!}{2} - \frac{n!}{3} - \cdots - \frac{n!}{n-1}$$

é divisível por n , mas o lado esquerdo não é. Isto demonstra o que queríamos no caso em que n é primo.

Uma maneira natural de tentar adaptar este argumento para o caso geral é discutir a divisibilidade das diversas parcelas de (2) por algum primo p ; por exemplo, para o maior primo menor ou igual a n . Percebe-se então a possível utilidade um resultado célebre da Teoria dos Números, conhecido como o Postulado de Bertrand, ou mais precisamente, como o Teorema de Bertrand-Chebyshev: dado um inteiro $n > 1$, existe um primo p satisfazendo $n < p < 2n$. Uma demonstração elementar (“elementar” não significa “fácil”, significa que só usa conceitos e técnicas básicas) deste teorema pode ser encontrada no Apêndice C do livro de José Plínio de Oliveira Santos *Introdução à Teoria dos Números*, volume da série Coleção Matemática Universitária, publicada pelo IMPA. Segue do Postulado de Bertrand que, se n é um inteiro maior que 2 e se p é o maior primo menor que n , então p não divide n . De fato, se n é primo, então p não divide n por definição. Se n não é primo e se p divide n , então $n = p \cdot m$, onde $m \geq 2$. Pelo postulado de Bertrand, existe um primo q satisfazendo $p < q < 2p \leq n$; ou seja, p não é o maior primo menor que n .

Voltemos agora ao problema de mostrar que S_n definido em (1) não é inteiro se $n > 2$. Seja p o maior primo menor que n e consideremos a igualdade

$$(3) \quad \frac{n!}{p} = n!S_n - n! - \frac{n!}{2} - \frac{n!}{3} - \cdots - \frac{n!}{p-1} - \frac{n!}{p+1} - \cdots - \frac{n!}{n-1} - \frac{n!}{n}$$

Todas as parcelas do segundo membro desta igualdade têm o fator p ; logo o inteiro do lado direito de (3) é divisível por p . Se $1 \leq k < p$, então p não divide k porque é maior que k ; se $p < k \leq n$, então p é o maior primo menor do que k , logo não divide k , pela consequência do Postulado de Bertrand mencionada no parágrafo anterior. Sendo p primo, p também não divide $n!/p$, que é igual ao produtos de todos os inteiros k satisfazendo $1 \leq k < p$ ou $p < k \leq n$. Logo, p não divide o lado esquerdo de (3), embora divida o lado direito. Absurdo!

Refletamos agora sobre a solução que acabamos de encontrar, com o intuito descobrir uma solução que não use o Postulado de Bertrand. Percebemos que tínhamos chegado a um absurdo quando concluímos que a potência de

p na fatoração do inteiro do lado esquerdo de (3) é zero e a potência de p em cada parcela do lado direito é maior ou igual a 1.

Troquemos o primo p por um inteiro m , $1 \leq m \leq n$, em (3):

$$(4) \quad \frac{n!}{m} = n!S_n - n! - \frac{n!}{2} - \frac{n!}{3} - \dots - \frac{n!}{m-1} - \frac{n!}{m+1} - \dots - \frac{n!}{n-1} - \frac{n!}{n}$$

Chegaremos a um absurdo se encontrarmos um primo p que apareça na fatoração do inteiro do lado esquerdo de (4) com um expoente N e na fatoração da soma do lado direito com expoente maior que N . Isso violaria a unicidade da fatoração em primos de um inteiro, pois seriam diferentes os expoentes de p na fatoração dos dois lados de (4). Usando o Postulado de Bertrand, nós vimos que, se tomarmos p como sendo o maior primo menor que n e $m = p$, então, com $N = 0$ chegamos ao absurdo procurado. Nossa tarefa agora é achar um primo p e um inteiro m que faça o esquema funcionar sem ser preciso usar o Postulado de Bertrand.

A seguinte observação é muito simples de verificar: se um primo p aparece com expoente maior que N na fatoração de um certo número de parcelas, então aparece com expoente também maior que N na soma dessas parcelas. É por isso que a meta de provar que a potência de p no segundo membro de (4) é maior (e não menor) do que no primeiro membro parece mais viável. Para isto, basta provar que o expoente de p em cada parcela do segundo membro é maior que o expoente de p na fatoração de $n!/m$.

Seja M o expoente de um primo p (que ainda vai ser escolhido) na fatoração de $n!$. Então o expoente de p na fatoração de $n!S_n$ é maior ou igual a M . As demais parcelas de (4) são todas da forma $n!/k$, para algum k tal que $1 \leq k \leq n$. Se $l_k \geq 0$ é o expoente de p na fatoração de k , então o expoente de p na fatoração de $n!/k$ será $M - l_k \leq M$. Vemos então que o problema estará resolvido se encontrarmos um primo p tal que o maior expoente de p na fatoração de todos os inteiros k de 1 até n ocorra em um único inteiro m (digamos que l_0 seja o maior expoente de p , que ocorre apenas em m ; então o expoente de p na fatoração de $n!/m$ será $M - l_0$ e o expoente de p na soma do segundo membro de (4) será maior do que $M - l_0$).

Já vimos que este é o caso se p for o maior primo menor ou igual a n , mas isto depende um resultado muito profundo e difícil de provar, o Postulado de Bertrand. Além disso, é bem simples verificar, por exemplo, que se n é uma potência de um primo p , então $m = n$ é o inteiro procurado (isto generaliza nosso primeiro resultado, que S_n não é inteiro se n é primo). Podemos também tentar tomar como p o maior primo que divide n e ingenuamente desejar que dê certo tomar $m = p^l$, com l denotando o expoente de p na fatoração de n . Mas aí a gente percebe qual é a dificuldade: n pode ser maior do que, digamos, $2p^l$ e portanto haverá um outro inteiro menor que n com p^l aparecendo em sua fatoração. O problema é que pode haver espaço demais entre p^l e n . Parece ser uma boa ideia portanto tentar primos pequenos, e por que não tomar logo o menor deles, dois?

Qual inteiro m terá a propriedade de o expoente de 2 na fatoração de k , $1 \leq k \leq n$, atingir seu máximo precisamente quando $k = m$? Resposta: será a maior potência de 2 que seja menor ou igual a n . De fato, se l é o único inteiro positivo tal que $2^l \leq n < 2^{l+1}$, então $m = 2^l$ é o único inteiro entre 1 e n que tem 2^l em sua fatoração, porque todo $k \neq m$ satisfazendo $1 \leq k \leq n$ tem em sua fatoração uma potência de dois com expoente l_k satisfazendo $0 \leq l_k < l$. De fato, se um inteiro J é diferente de m e tem em sua fatoração uma potência de 2 com expoente maior ou igual a l , então $J = 2^l K$, com $K \geq 2$; logo $J \geq 2^{l+1} > n$. É aqui que se vê direitinho que este argumento só funciona para o primo 2: por exemplo, a maior potência de 3 menor que 20 é 9, entretanto 18 é um outro inteiro menor que 20 que tem 3 com expoente 2 em sua fatoração.

Em resumo, se l é o único inteiro positivo tal que $2^l \leq n < 2^{l+1}$, $m = 2^l$ e M é o expoente de 2 na fatoração de $n!$, então o expoente de 2 na fatoração do primeiro membro de (4) é $M - l$ e na fatoração do segundo membro é maior que $M - l$. Absurdo!

(7) Roteiro: mostraremos primeiro, por indução, que $f(n) \geq n$ para todo n ; daí concluiremos que f é crescente, donde seguirá o que queremos mostrar.

Demonstremos por indução sobre k que, para todo $k \geq 1$,

$$(5) \quad f(n) \geq k \quad \text{para todo } n \geq k$$

(em particular, teremos então que $f(n) \geq n$ para todo n).¹ A afirmação (5) é trivialmente verdadeira para $k = 1$, pois o contradomínio de f são os inteiros positivos. Suponha que (5) é verdadeira para k . Tome $n \geq k + 1$. Usando a hipótese de indução para $n - 1$ (que é maior ou igual a k) vem que $f(n - 1) \geq k$ e portanto que também $f(f(n - 1)) \geq k$. Usando a desigualdade que f satisfaz por hipótese, temos $f(n) > f(f(n - 1)) \geq k$; logo $f(n) \geq k + 1$, como queríamos.

Mostremos agora que f é crescente, isto é, que $f(n) < f(m)$ sempre que $1 \leq n < m$. Claro que basta mostrar que $f(n) < f(n + 1)$ para todo $n \geq 1$. Se isto fosse falso, existiria $n_0 \geq 1$ tal que $f(f(n_0)) < f(n_0 + 1) \leq f(n_0)$. Logo $k_0 = f(n_0)$ não satisfaria a desigualdade $f(n) \geq n$, que já sabemos ser válida para todo $n \geq 1$.

Sendo f crescente, é também verdade que $f(n) < f(m)$ só se $n < m$ (raciocine por contradição para ver isto). Daí, para cada n , como $f(f(n)) < f(n + 1)$, temos que $f(n) < n + 1$. Mas já sabíamos que $f(n) \geq n$. Logo, $f(n) = n$.

¹O ponto mais “tricky” desta solução talvez seja formular como em (5) a hipótese de indução. Por que não, por exemplo, usar como passo de indução a afirmação (6) abaixo em vez de (5)?

$$(6) \quad \text{Para cada } k \geq 1, \quad f(n) \geq n \quad \text{para todo } 1 \leq n \leq k.$$

Logicamente falando, claro que seria possível fazer assim, mas, tentando fazer, a gente vê que não sai fácil desse jeito. Uma maneira de chegar a (5) é observar primeiro que $f(1) \geq 1$, depois supor por absurdo que $f(2) < 2$ e ver que não pode; depois supor por absurdo que $f(3) < 3$, etc. A gente acaba percebendo que, em cada passo, é preciso avançar além do k em questão, e que, portanto, (5) é uma hipótese de indução mais “prática” do que (6).