MAT0450 - Seminário de Resolução de Problemas
IME-USP, 1° Semestre de 2013
Terceira Lista

(**1**) Sejam A, B e C os vértices de um triângulo isósceles, com AC=BC, seja θ a medida do ângulo do vértice C, seja M o ponto médio do lado oposto ao vértice C, seja h=CM. Dado um ponto P no interior do triângulo, denotemos por x, y e z as distâncias de P aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Para cada valor de θ, obtenha uma constante k tal que x+ky+kz=h, quaisquer que sejam o triângulo e o ponto P como acima.

(**2**) Em um plano, é dado um quadrilátero de vértices A, B, C e D, percorridos no sentido anti-horário. Escolha um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas de tal forma que esses pontos tenham, respectivamente, coordenadas (0,0), (1,0), (x,y) e (z,w). Sejam A', B', C' e D' os pontos construídos a partir do quadrilátero ABCD na maneira descrita na quarta questão da segunda lista.

(a) Descreva como solução de um sistema de inequações o conjunto S de todos os (x,y,z,w) tais que ABCD seja um quadrilátero convexo.

(a') (alternativa para o (a)) Mostre que ABCD é um quadrilátero convexo se se somente se as seguintes desigualdades são satisfeitas: $y > 0$, $w > 0$, $xw - yz > 0$ e $xw - yz > w - y$.

(b) Encontre as coordenadas de A', B', C' e D'.

(c) Seja S' o subconjunto de S de todos os (x,y,z,w) tais que A'B'C'D' seja convexo. Mostre que S' é diferente de S.

(d) Descreva como solução de um sistema de equações o subconjunto R de S de todos os (x,y,z,w) tais que ABCD seja um paralelogramo.

(e) Seja R' o subconjunto de S de todos os (x,y,z,w) tais que A'B'C'D' seja um paralelogramo. Mostre que R'=R.

(**3**) Considere um tetraedro regular. Sejam r o raio da esfera inscrita no tetraedro, s o raio da esfera que tangencia as arestas do tetraedro e t o raio da esfera circunscrita ao tetraedro. Mostre que r, s e t, nesta ordem, estão em progressão geométrica.

(**4**) Em um tetraedro regular, denotemos por O seu centro. Calcule o cosseno do ângulo $A\hat{O}B$, sendo A e B vértices do tetraedro.

(**5**) No quadrado de lado 1 ABCD, prolonga-se, a partir de D, o lado $\overline{AD}$, obtendo-se assim o ponto E. Chamemos de F a interseção dos segmentos $\overline{DC}$ e $\overline{BE}$. Sabendo que EF=1, obtenha ED. (Vejam a figura do Problema 12 de http://www.ime.usp.br/~alpereir/resprob/12lista3.pdf.)