MAT 2456 - CÁLCULO IV - POLI - 2005
Lista 6 - Equações Diferenciais

(1) REDUÇÃO DE ORDEM: Alguns tipos de equações de 2^a ordem podem, após uma mudança de variável, passar a ser de 1^a ordem e assim resolvidas pelos métodos conhecidos.

CASO 1: Variável Dependente Ausente: Se na equação y não estiver presente, fazemos $z = y'$ e assim como $y'' = z'$, a equação passa ser de 1^a ordem.
Ex.: $xy'' - y' = 3x^2$; se $z = y'$, então temos a equação $xz' - z = 3x^2$.

((a) Resolva por esse método as equações:

(1) $xy'' - y' = 3x^2$ (2) $xy'' = y' + (y')^3$
(3) $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$ (4) $x^2y'' + xy' = 1$

CASO 2: Variável Independente Ausente: Se a variável x não estiver presente explicitamente na equação, introduzimos uma nova variável dependente u, fazendo $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$, e temos então que $y'' = \dfrac{du}{dx} = \dfrac{du}{dy}.\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{du}{dy}$ e, fazendo a substituição, a equação se transforma em duas equações de 1^a ordem.
Ex: $y'' + y = 0$
$u\dfrac{du}{dy} + y = 0$ e $u = \dfrac{dy}{dx}$

(b) Resolva por esse método as seguintes equações:

(1) $y'' + 4y = 0$ (2) $y'' - 9y = 0$
(3) $yy'' + (y')^2 = 0$ (4) $yy'' = y^2y' + (y')^2$

(c) Encontre a solução particular

(1) $(x^2 + 2y')y'' + 2xy' = 0$; $y'(1) = 0$; $y(1) = 1$. O que acontece com as condições iniciais $y'(0) = 0, y(0) = 1$?

(2) $yy'' = y^2y' + (y')^2$; $y(0) = -\dfrac{1}{2}$; $y'(0) = 1$.

(2) Determine outra solução y_2 das equações abaixo, a partir de y_1 dada, de forma que o conjunto $\{y_1(x), y_2(x)\}$ seja linearmente independente. Mostre que o conjunto é linearmente independente:

(1) $x^2y'' + xy' - 4y = 0, \quad y_1 = x^2$

(2) $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad y_1 = x$

(3) $y'' - \dfrac{x}{x-1}y' + \dfrac{1}{x-1}y = 0, \quad y_1 = x$

(4) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \; y_1 = x$

(5) $xy'' + 3y' = 0, \; y_1 = 1$

(6) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \; y_1 = x^{\frac{-1}{2}}$

(7) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0, \; y_1 = e^x$

(3) Determine a solução geral das equações:
(1) $y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$
(2) $y'' - f(x)y' + (f(x) - 1)y = 0$

(5) Determine todas as soluções das equações:
(1) $y'' + 2y' + y = 0$
(2) $y'' - 4y' + 4y = 0$
(3) $y''' - y'' + y' - y = 0$
(4) $2y'' - 4y' + 8y = 0$
(5) $y'' - 9y' + 20y = 0$
(6) $2y'' + 2y' + 3y = 0$
(7) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
(8) $\frac{d^4y}{dx^4} + y = 0$
(9) $\frac{d^5y}{dx^5} + 2\frac{d^3y}{dx^5} + \frac{dy}{dx} = 0$

(6) Uma equação linear da forma $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são constantes, é chamada EQUAÇÃO DE EULER de segunda ordem. A mudança de variável $x = e^z$ se $x > 0$ (e $x = e^{-x}$ se $x < 0$) transforma a equação de Euler em uma equação linear de coeficientes constantes.
Aplique esta técnica para determinar a solução das equações:
(1) $x^2y'' + xy' + y = 0$
(2) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
(3) $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$
(4) $2x^2y'' + 10xy' + 3y = 0$
(5) $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$

(7) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de
$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x)$ e
$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_2(x)$
respectivamente, mostre que $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ é solução de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x) + R_2(x)$. (Princípio de Superposição) Use isto para resolver:
(1) $y'' + 3y' + 2y = e^x + e^{2x}$
(2) $y'' + y' - 6y = sen\ x + xe^{2x}$
(3) $y'' + 2y' = 1 + x^2 + e^{-2x}$
(4) $y'' + y' - 2y = 6e^{-x} + 4$
(5) $y'' + y = \cos x + 8x^2$

(8) Resolva.

a) $xy'' - y' = 3x^2$

b) $x^2y'' + xy' - y = x^2$

c) $y''' + y' = sec\ x$

(9) Determine a solução geral das seguintes equações:

(1) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$

(2) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$

(3) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sec 2x$

(4) $y'' - 2y' = 12x - 10$

(5) $y'' + y = 2\cos x$

(6) $(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2-1)^2$

(7) $(x^2+x)y'' + (2-x^2)y - (2+x)y = x(x+1)^2$

(8) $y'' + 4y = 3\ sen\ x$

(9) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$

(10) $y'' - 4y = x^2e^{2x}$

(11) $y'' + y' - 2y = 8\ sen\ x$

(12) $y'' - 3y' = x + \cos x$

(13) $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 2\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} = x^3$

(14) $y''' - y = x^3 - 1$

(15) $y'' - 2y = 2e^x(\cos x - sen\ x)$

(10) Ache a solução geral da equação diferencial dada, em série de potências centradas em 0.

(1) $y'' - xy' - y = 0$

(2) $y'' - x^2y = 0$

(3) $y'' + 2xy' + 4y = 0$

(11) (i) Uma equação diferencial da forma $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0,\ p \in I\!R$, é chamada EQUAÇÃO DE BESSEL de ordem p.

(a) Se $p = 0$, mostre que $y_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$ e $y_2 = y_1\ln x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right)x^{2n}$ são soluções LI da equação de Bessel.

(b) Se $p = 1$ mostre que $y = x\left(1 - \dfrac{x^2}{2^2 2!} + \dfrac{x^4}{2^4 2!3!} - \dfrac{x^6}{2^6 2!3!4!} + ...\right)$ é solução.

(ii) A equação diferencial $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0,\ \alpha \in I\!R$ é chamada EQUAÇÃO DE LEGENDRE. Mostre que

$$y_1 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^n \tfrac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)...(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)...(\alpha+2m-1)}{(2m)!}x^{2m}$$

e

$$y_2 = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)...(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)...(\alpha+2m)}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

são soluções independentes da equação de Legendre, no intervalo $|x| < 1$.

(12) Discutir o comportamento das soluções das equações seguintes, e sua interpretaçào física:

a) Equação homogênea de mola:

$$x'' + 2\mu x' + \alpha^2 x = 0, \quad (\mu \geq 0)$$

b) Equação da mola com segundo membro periódico, sem atrito

$$x'' + \alpha^2 x = \beta \mathrm{sen} wt$$

c) Equação da mola com segundo membro periódico, com atrito

$$x'' + 2\mu x' + \alpha^2 x = \beta \mathrm{sen} wt \quad (\mu \geq 0)$$

MAT 211 - CÁLCULO IV - POLI
LISTA 6 - RESPOSTAS

(1) Respostas

(a) (1) $y(x) = x^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2$

(2) $y(x) = -\frac{1}{C_1}\sqrt{1 - C_1^2x^2} + C_2$

(3) $y(x) = -\frac{x^2}{2} - C_1x - C_1^2 \ln|x - C_1| + C_2$

(4) $y(x) = \frac{\ln^2|x|}{2} + C_1 \ln \ |x| + C_2$

(b) (1) $y(x) = C_1 \ sen \ 2x + C_2 \cos 2x$

(2) $y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$

(3) $y^2 = C_1x + C_2$

(4) $y = C_2(C_1 + y)e^x$

(2) Respostas

(1) $y_2 = C_1x^2 + C_2x^{-2}$

(3) $y_2 = C_1x + C_2e^x$

(5) $y_2 = C_1 + C_2x^{-2}$

(7) $y^2 = C_1e^x + C_2e^xx^2$

(3) Respostas

(1) $y(x) = C_1x + C_2x - \int x^{-2}e^{\int x \ f(x)dx}dx$

(2) $y(x) = C_1e^x + C_2e^x \int e^{-2x+\int f(x)dx}dx$

(5) Respostas

(1) $y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$

(2) $y(x) = C_2e^{2x} + C_2xe^{2x}$

(3) $y(x) = C_1e^x + C_2 \ sen \ x + C_3 \cos x$

(4) $y(x) = C_1e^x \ sen\sqrt{3x} + C_2e^x \cos\sqrt{3x}$

(5) $y(x) = C_1e^{5x} + C_2e^{4x}$

(6) $y(x) = C_1e^{\frac{-1}{2}x} \ sen\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2e^{\frac{-1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{5}}{2}x$

(7) $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$

(8) $y(x) = C_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 \ sen\frac{\sqrt{2}}{2}x$

(9) $y(x) = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \ sen \ x + C_4x \cos \ x + C_5c \ sen \ x$

(6) Respostas

(1) $y(x) = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \ sen(\ln x) + 1$

(2) $y(x) = C_1x^2 + C_2x^2 \ln x$

(3) $y(x) = x^{-1}[C_1 \cos(\ln x^3) + C_2 \ sen(\ln x^3)]$

(4) $y(x) = C_1x^{-2+\sqrt{\frac{10}{2}}} + C_2x^{-2-\sqrt{\frac{10}{2}}}$

(5) $y(x) = C_1x^3 + C_2x^{-4}$

(7) Respostas

(1) $y(x) = \frac{e^x}{6} + \frac{e^{2x}}{12} + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$

(2) $y(x) = -\dfrac{1}{50}\cos x - \dfrac{7}{50}\ sen\ x + e^{2x}\left(\dfrac{1}{10}x^2 - \dfrac{1}{10}x^2 - \dfrac{1}{25}x + \dfrac{1}{125} + C_1\right) + C_2e^{-3x}$

(3) $y(x) = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{x^3}{6} + e^{-2x}\left(C_2 - \dfrac{1}{2}x\right) - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{3}{8} + C_1$

(4) $y(x) = -3e^{-x} - 2 + C_1e^x + C_2e^{-2x}$

(5) $y(x) = sen\ x\left(\dfrac{1}{2}x + C_1\right) + C_2\cos x + 8x^2 - 16$

(8) Respostas

a) $A + Bx^2 + x$

b) $y = \dfrac{x^2}{3} + Ax + \dfrac{B}{x}$

c) $y = A + B\text{sen}x + C\cos x + \ln|\sec x + tg\ x| + \text{sen}x\ln|\cos x| - x\cos x$

(9) Respostas

(1) $y(x) = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x}\ln x - \dfrac{3}{4}x^2e^{-x} + C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$

(2) $y(x) = -e^{-x}(8x^2 + 4x + 1) + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$

(3) $y(x) = \dfrac{1}{2}xe^{-x}\ sen2x + \dfrac{1}{4}e^{-x}\cos 2x + C_1e^x\cos 2x|C_2e^x\ sen\ 2x$

(4) $y(x) = -3x^2 + 2x + 1 + C_1 + C_2e^{2x}$

(5) $y(x) = x\ senx + C_1\ sen\ x + C_2\cos x$

(6) $y(x) = C_1x + C_2(x^2 + 1) + \dfrac{x^4}{6} - \dfrac{x^2}{2}$

(7) $y(x) = C_1e^x + C_2x^{-1} - x - 1\dfrac{x^2}{3}$

(8) $y(x) = C_1\cos 2x + C_2\ sen2x +\ senx$

(9) $y(x) = e^{-5x}(7x^2 + C_1x + C_2)$

(10) $y(x) = e^{2x}\left(\dfrac{1}{12}x^3 - \dfrac{1}{16}x^2 + \dfrac{1}{32}x - \dfrac{1}{128} + C_1\right) + C_2e^{-2x}$

(11) $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} - \dfrac{2}{5}(3\ sen\ 2x + \cos 2x)$

(12) $y(x) = C_1 + C_2e^{3x} - \dfrac{1}{10}(\cos x + 3\ senx) - \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x}{9}$

(13) $y(x) = C_1 + C_2x + 12x^2 + 3x^3 + \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{20}x^5 + (C_3 + C_4x)e^x$

(14) $y(x) = C_1e^x + e^{\frac{-1}{2}x}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\ sen\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) - x^3 - 5$

(15) $y(x) = C_1e^{x\sqrt{2}} + C_2e^{-x\sqrt{2}} + e^x sen$

(10) Respostas

(1) $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2x}}{2^n n!} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n.n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

(2) $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{4n}}{4n(n-1)(4n-4)(4n-5)...4.3} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{4n+1}}{(4n+1)(4n)...5.4}$

(3) $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^n x^{2n}}{(2n-1)(2n-3)...5.3} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{n1}$