MAT 2456 - Cálculo IV - POLI - 2005

LISTA 5

Equações Diferenciais de $1^{\underline{a}}$ Ordem

1) a) Os gráficos de duas soluções de $y' = x + y^2$ podem se cruzar num ponto (x_0, y_0)?

b) Os gráficos de duas soluções de $y' = x+y^2$ podem ser tangentes num ponto (x_0, y_0)?

2) Dê as soluções das equações diferenciais de $1^{\underline{a}}$ ordem abaixo, com seus domínios (máximos):

a) $y' = y^2$

b) $xy' = y$

c) $yy' = x$

d) $y' = (1-y)(2-y)$

e) $(x + 3y) - x\frac{dy}{dx} = 0$

f) $y' = 2y + e^x$

3) Dê as soluções das equações com condições iniciais dadas:

a) $y' = x + y,\ y(0) = 1$

b) $(cos\ t)x' - (sen\ t)x = 1,\ x(2\pi) = \pi$

c) $y' = x(1 + y),\ y(0) = -1$

4) Dê duas soluções para cada uma das equações com a condição inicial dada:

a) $y' = 5y^{4/5},\ y(0) = 0$

b) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}(3x^2 + 1),\ y(0) = 0$

5) Resolva as equações:

a) $y' = e^{x-2y}$

b) $x^2y^2\frac{dy}{dx} = 1 + x^2$

c) $y'sen\ x + y\ cos\ x = 1$

d) $y' = x^3 - 2xy$

e) $\left(3x^2tg\ y - \frac{2y^3}{x^3}\right) + \left(x^3sec^2y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right)\frac{dy}{dx} = 0$

f) $(1 - xy) + (xy - x^2)\frac{dy}{dx} = 0$

g) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

h) $(1 + t^2)y' + ty + (1 + t^2)^{5/2} = 0$

i) $\frac{dr}{d\theta} = sec^2\theta\ sec^3r$

j) $3t^2x' = 2x(x - 3)$

k) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$

l) $(1 - xy)y' = y^2$

m) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2},\ x > 0$

6) Resolva as equações:

a) $(x + y)dx + x\ dy = 0$

b) $(xe^y + y - x^2)dy = (2xy - e^y - x)dx$

c) $cos\ x\ dy = (1 - y - sen\ x)dx$

d) $y(x^2 + y^2)dx + x(3x^2 - 5y^2)dy = 0$

e) $e^xsen\ ydx + e^xcos\ y\ dy = y\ sen(xy)dx + x\ sen(xy)dy$

f) ache as soluções dos exercícios a) b) d) que passam pelo ponto (1,1)

7) Mostre que a substituição $z = ax + by + c$ muda a equação $y' = f(ax + by + c)$ numa equação as variáveis separáveis e aplique esse método para resolver.

a) $y' = (x + y)^2$ b) $y' = sen^2(x - y + 1)$

c) $(x + 2y - 1)dx + 3(x + 2y)dy = 0$

8) Uma <u>Equação de Bernoulli</u> é uma equação da forma

$$\text{(B)} \quad y' + p(x)y = q(x)y^n.$$

sendo $n \in I\!R$. Se $n = 1$, essa é uma equação linear. Se $n \neq 1$, pode-se reescrever (B) como

$$(\text{B}_1) \quad y^{-n}y' + p(x)y^{-n+1} = q(x).$$

Fazendo $z = y^{-n+1}$, (B_1) se transforma na equação linear

$$(\text{B}_2) \quad z' + (1 - n)p(x)z = (1 - n)q(x).$$

Use esse método para resolver:

a) $y(6x^2y^2 - x + 1) + 2xy' = 0$ b) $y' = y + e^{-3x}y^4$

c) $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$ (que também é homogênea!)

d) $x^3y' = 2y(\sqrt[3]{y} + 3x^2)$

9) a) Determine todas as funções f que tornam exata a equação diferencial $(y^2 sen\ x)dx + yf(x)dy = 0$.

b) A equação $g(x)dy + (y + x)dx = 0$ tem $h(x) = x$ como fator integrante. Determine todas as possíveis funções g.

c) A equação $e^x sec\ y - tg\ y + y' = 0$ tem um fator integrante da forma $f(x, y) = e^{ax} cos\ y$. Determine <u>a</u> e resolva a equação.

d) Ache um fator integrante da forma $h(x, y) = x^n y^m$ para a equação $y(y^2 + 1)dx + x(y^2 - 1)lnxdy = 0$ e resolva-a.

e) Achar um fator integrante da forma $\mu = \mu(x + y^2)$ para a EDO $(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0$.

f) Ache um fator integrante da forma $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ para a EDO $xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$

10) Determine uma função $y = f(x)$ definida em um intervalo I, cujo gráfico passe pelo ponto $(0, 5/4)$ e tal que para todo $t > 0$, $t \in I$, o comprimento do gráfico de

$y = f(x),\ 0 \leq x \leq t$, seja igual à área do conjunto $0 \leq y \leq f(x),\ 0 \leq x \leq t$.

11) Determine uma função $y = f(x)$ cujo gráfico passe pelo ponto (1,1) e tal que para todo p em seu domínio, a área do triângulo com vértices $(p, 0), (p, f(p))$ e M seja 1, onde M é a intersecção da reta tangente ao gráfico em $(p, f(p))$ com o eixo x.

12) Ache as trajetórias ortogonais às famílias de curvas:

a) $x^2 + y^2 = c$

b) $2x^2 + 3y^2 = c$

c) $y = cx^2$

d) $y = ce^x$

RESPOSTAS

$a \in I\!\!R$ em qualquer exercício

2) a) $y \equiv 0,\ x \in I\!\!R;\ y = \frac{1}{a-x},\ x < a$ e $x > a$

b) $y = ax,\ x \in I\!\!R$

c) $y = \sqrt{x^2+k}$ e $y = -\sqrt{x^2+k},\ x^2 > -k$ se $k < 0,\ x \in I\!\!R$ se $k > 0$ e $x < 0$ ou $x > 0$ se $k = 0$.

d) $y \equiv 1,\ x \in I\!\!R,\ y \equiv 2,\ x \in I\!\!R;\ y = \frac{ke^x-2}{ke^x-1},\ x \in I\!\!R$ se $k \leq 0$ e $x < -ln\ k$ ou $x > -ln\ k$ se $k > 0$.

e) $y = ax^3 - \frac{x}{2},\ x \in I\!\!R.$

f) $y = ae^{2x} - e^x,\ x \in I\!\!R$

3)

a) $y = 2e^x - x - 1$

b) $x = \frac{t-\pi}{cos\ t}$

c) $y \equiv -1$

4)

a) $y \equiv 0$ e $y = x^5$

b) $y \equiv 0$ e $y = (x^3 + x)^3$

5)

a) $y = \frac{1}{2}ln(2e^x + C),\ C \in I\!\!R$

b) $y = \sqrt[3]{\frac{3x^2-3-Cx}{x}},\ C \in I\!\!R$

c) $y = \frac{x+C}{sen\ x},\ C \in I\!\!R$

d)$y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + Ce^{-x^2},\ C \in I\!\!R$

e) $x^3 tg\ y + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = C,\ C \in I\!\!R$

f) $y^2 - 2xy + ln\ x^2 = C,\ C \in \mathbb{R}$

g) $y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$ para $x > 0$ e $y - \sqrt{x^2+y^2} = -C$ para $x < 0,\ C > 0$

h) $y = \frac{C-15t-10t^3-3t^5}{15\sqrt{1+t^2}},\ C \in \mathbb{R}$

i) $3sen\ r - sen^3 r = 3tg\theta + C,\ C \in \mathbb{R}$

j) $x \equiv 0,\ x \equiv 3$ e $x = \frac{3}{1-Ce^{-2/t}},\ C \in \mathbb{R}$

k) $tg\left(\frac{y}{x}\right) = ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$

l) $xy - ln|y| = C,\ C \in \mathbb{R}$

m) $\frac{y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^2} + ln\left|\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}\right| = C,\ C \in \mathbb{R}$

6)

a) $x^2 + 2xy = C,\ C \in \mathbb{R}$

b) $x^2 + y^2 + 2xe^y - 2x^2y = C,\ C \in \mathbb{R}$

c) $y = \frac{x+C}{sec\ x + tg\ x},\ C \in \mathbb{R}$

d) $y^3(x^2 - y^2) = Cx,\ C \in \mathbb{R}$

e) $e^x sen\ y + cos(xy) = C,\ C \in \mathbb{R}$

7)

a) $y = tg(x+C) - x,\ C \in \mathbb{R}$

b) $tg(x - y + 1) = x + C,\ C \in \mathbb{R}$

c) $y - ln|x + 2y + 2| + \frac{x}{3} = C,\ C \in \mathbb{R}$

8)

a) $y \equiv 0$ e $y^2 = \frac{1}{6x+Cxe^{-x}},\ C \in \mathbb{R}$

b) $y \equiv 0$ e $y = \frac{e^x}{\sqrt[3]{C-3x}},\ C \in \mathbb{R}$

c) $y \equiv 0$ e $y^2 = \frac{x^3}{C-x},\ C \in \mathbb{R}$

d) $y \equiv 0$ e $y = \frac{27x^6}{(C-ln\ x^2)^3},\ C \in \mathbb{R}$

9)

a) $f(x) = C - 2cos\ x,\ C \in \mathbb{R}$

b) $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x},\ C \in \mathbb{R}$

c) $a = -1;\ x + e^{-x} sen\ y = C,\ C \in \mathbb{R}$

d) $n = -1;\ m = -2;\ (y^2+1)ln\ x = Cy,\ C \in \mathbb{R}$ e $y \equiv 0$

e) $\mu(x + y^2) = x + y^2$

f) $\mu = (x^2+y^2)^{-3/2}$

10) $y = \dfrac{e^{-x} + 4e^x}{4}$

11) $y = \dfrac{2}{x+1}$ ou $y = \dfrac{2}{3-x}$