**MAT 2456 - Cálculo IV - POLI - 2005**
**Lista 4**
**SÉRIES DE FOURIER**

1. Ache a série de Fourier das funções abaixo, determine sua soma e faça os gráficos:

   a) $f(x) = \begin{cases} a, & -\pi < x \leq 0 \\ b, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x \leq 0 \\ bx, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

   c) $f(x) = |x|, \ -\pi < x \leq \pi$

   d) $f(x) = e^{ax}, \ -\pi < x \leq \pi, \ a \neq 0$

   e) $f(x) = sen\ ax, \ -\pi < x \leq \pi, \ a \notin \mathbb{Z}$

   f) $f(x) = ax + b, \ -\pi < x \leq \pi$

   g) $f(x) = |cos\ x|, \ -\pi < x \leq \pi$

2. Ache a série de Fourier de senos e de cossenos das funções abaixo, determine sua soma e faça os gráficos:

   a) $f(x) = ax, \ 0 \leq x \leq \pi$

   b) $f(x) = x^2, \ 0 \leq x \leq \pi$

   c) $f(x) = ax + b, \ 0 \leq x \leq \pi$

   d) $f(x) = sen\ x, \ 0 \leq x \leq \pi$

   e) $f(x) = |cos\ x|, \ 0 \leq x \leq \pi$

3. Mostre que:

   a) $1 = \frac{4}{\pi}(sen\ x + \frac{1}{3}sen\ 3x + \frac{1}{5}sen\ 5x + ...), \ 0 < x < \pi$ ;

   b) $\pi - x = 2(sen\ x + \frac{1}{2}sen\ 2x + \frac{1}{3}sen\ 3x + ...), \ 0 < x < \pi;$

   c) $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4(-cos\ x + \frac{cos\ 2x}{2^2} - \frac{cos\ 3x}{3^2} + ...), \ -\pi < x < \pi$

   d) $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - (cos\ 2x + \frac{cos\ 4x}{2^2} + \frac{cos\ 6x}{3^2} + ...), \ 0 < x < \pi$

   e) $x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}(sen\ x + \frac{sen\ 3x}{3^3} + \frac{sen\ 5x}{5^3} + ...), \ 0 < x < \pi$

4. Verifique as seguintes igualdades, usando o exercício 3:

   a) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + ...$

   b) $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$

   c) $\frac{\pi^3}{32} = \sum\limits_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$

   d) $\frac{3\pi^3}{128}\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - ...$

   e) $\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{5}\sqrt{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7}\sqrt{2} + \frac{1}{9}\sqrt{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11}\sqrt{2} - \frac{1}{13}\sqrt{2} - ...$

   f) $\frac{\pi^4}{90} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

   g) $\frac{\pi^6}{945} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$

5. Calcule a soma das séries:

   a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

6. Determine $c_1, c_2, c_3$ de modo que as integrais abaixo assumam o menor valor possível: a) $\int_{-\pi}^{\pi} [x - c_1 sen\ x - c_2 sen\ 2x - c_3 sen\ 3x]^2 dx$

   b) $\int_{-\pi}^{\pi} [x^2 - c_1]^2 dx$

   c) $\int_{-\pi}^{\pi} [|cos\ x| - c_1 - c_2 sen\ x - c_3 cos\ x]^2 dx$

7. Ache a série de Fourier da função $f(x)$ periódica de período 1 e que satisfaz $f(x) = x^2$ se $0 \leq x < 1$.

   Qual a soma de série quando $x = \dfrac{999}{2}$? E quando $x = 999$?

8. a) Ache a série de Fourier da função ímpar $f(x)$, periódica de período 4, e que satisfaz $f(x) = x$ se $0 \leq x \leq 1$ e $f(2-x) = f(x)$ se $0 \leq x < 1$.

   b) Encontre $b_1, b_2, b_3, ...$ tais que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n sen \frac{(2n-1)\pi x}{2} = x$ se $0 < x < 1$

   c) Encontre $c_1, c_2, c_3, ...$ tais que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n sen \frac{(2n-1)\pi x}{2} = 1 - x$ se $0 < x < 1$

   d) Quando vale a soma de série do item c quando $x = 200$? E quando $x = 201$?

9. a) Mostre que se $f$ é par $\Longrightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{\circ}^{a} f(x)dx$

   b) Mostre que se $g$ é impar $\Longrightarrow \int_{-a}^{a} g(x)dx = 0$

   c) Mostre que:

   i) Se $f : [-\pi, \pi] \to I\!R$ é par e $f$ é $\mathcal{C}^1$ por partes em $[0, \pi] \Rightarrow F$ é $\mathcal{C}^1$ por partes em $[-\pi, \pi]$

   ii) Analogamente se $f$ é ímpar.

10. a) Mostre que $x, x^3, x^{2k+1}, \text{sen} x, \sqrt[3]{x}$ são funções ímpares.

    b) Mostre que $x^2, x^4, x^{2k}, \cos x, \sec x$ são funções pares.

11. Mostre que se $f_1, f_2$ funções pares e $g_1, g_2$ são funções ímpares então

    a) $f_3(x) = f_1(x)f_2(x)$ é par.

    b) $g_3(x) = g_1(x)g_2(x)$ é par.

    c) $h(x) = f_1(x)g_1(x)$ é ímpar.

12. Mostre que se $f$ é par ou $f$ é ímpar $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f^2(x)dx = 2\int_{0}^{a} f^2(x)dx$.

**RESPOSTAS**

1. a) $\frac{a+b}{2}+\frac{2}{\pi}(b-a)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{sen(2n-1)x}{2n-1}$

**soma:** $a$, se $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$; $b$, se $2k\pi < x < (2k+1)\pi$;

$\frac{a+b}{2}$, se $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{b-a}{4}\pi+\frac{2}{\pi}(a-b)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}-(a+b)\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{sen\ nx}{n}$

**soma:** $ax$; se $(2k-1)\pi < x \leq 2k\pi$; $bx$, se $2k\pi \leq x < (2k+1)\pi$

$\frac{b-a}{2}\pi$, se $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

**soma:** $|x|$; se $-\pi \leq x \leq \pi$

extensão periódica de $|x|$, para $x \in \mathbb{R}$

d) $\frac{senh(a\pi)}{a\pi}+\frac{2senh(a\pi)}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}(a\ cos\ nx - n\ sen\ nx)$

$e^{ax}$ para $-\pi < x < \pi$; $cosh(a\pi)$ para $x = \pm\pi$,

sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$

e) $\frac{2sen(a\pi)}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2-a^2}sen\ nx$

$sen(ax)$ para $-\pi < x < \pi$, $0$ para $x = \pm\pi$

f) $b+2a\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{sen\ nx}{n}$

$ax+b$ para $-\pi < x < \pi$, $b$ para $x = \pm\pi$ ,

sua extensão periódica, para $x \in \mathbb{R}$

g) $\frac{2}{\pi}(1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{cos\ 2nx}{4n^2-1})$

$|cos\ x|$ para $x \in \mathbb{R}$

2. a) $2a\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{sen\ nx}{n}$, $ax$ para $-\pi < x < \pi$, $0$ para $x = \pm\pi$, sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$

$\frac{a}{2}\pi-\frac{4a}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{cos(2n-1)^x}{(2n-1)^2}$,

**soma:** $a|x|$ para $-\pi \leq x \leq \pi$, extensão periódica de $a|x|$ para $x \in \mathbb{R}$

b) $2\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{sen\ nx}{n}-\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{sen(2n-1)x}{(2n-1)^3}$, **soma:** $-x^2$ para $x = \pm\pi$, sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$

$\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{cos\ nx}{n^2}$,

$x^2$ para $-\pi \leq x \leq \pi$ e suaextensão periódica para $x \in \mathbb{R}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(b-(a\pi+b)(-1)^n)sen\ nx$, $ax-b$ para $-\pi < x \leq 0$, $ax+b$ para $0 < x < \pi$, $0$ para $x = \pm\pi$, $0$ e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$ $\frac{a\pi}{2}+b-\frac{4a}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$,

$a|x|+b$ para $-\pi \leq x \leq \pi$ extensão periódica de $a|x|+b$ para $x \in \mathbb{R}$

d) $sen\ x$, $sen\ x$

$\frac{2}{\pi}(1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\ 2nx}{4n^2-1})$, $|sen\ x|$ para $x \in I\!R$

e) $\frac{e}{\pi} sen\ x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1+(-1)^n}{\pi n(n-1)} sen(2n-1)x$, $-|cos\ x|$ para $x \leq 0$

$|cos\ x|$ para $x \geq 0,\ x \neq k\pi$ e 0 para $x = k\pi,\ k \in Z\!\!Z$.

$\frac{2}{\pi}(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{cos\ 2nx}{4n^2-1}$, $|cos\ x|$ para $x \in I\!R$

4. a) usar 3a) em $x_0 = \pi/2$
   b) usar 3b) em $x_0 = \pi$
   c) usar 3e) em $x_0 = \pi/2$
   d) usar 3e) em $x_0 = \pi/4$
   e) usar 3b) em $x_0 = \pi/4$
   f) ..... para 3c)
   g) ..... para 3e)
5. a) $\frac{\pi^2}{8}$ b) $\frac{\pi^2}{12}$
6. a) $c_1 = 2,\ c_2 = -1,\ x_3 = \frac{2}{3}$
   b) $c_1 = \frac{2\pi^2}{3}$
   c) $c_1 = \frac{4}{\pi},\ c_2 = 0,\ c_3 = 0$