MAT 2456 - CÁLCULO IV - POLI - 2005
Lista 3 - Séries de Potências (II)

Justifique todas as afirmações

1. Usando derivação e integração termo a termo, calcular as somas das séries.

   a) $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + ... + \dfrac{x^n}{n} + ...$ b) $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\ \dfrac{x^n}{n} + ...$

   c) $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + ... + \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + ...$ d) $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1}\ \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + ...$

   e) $1 + 2x + 3x^2 + ... + (n+1)x^n + ...$ f) $x + 2x^2 + 3x^3 + ... + nx^n + ...$

   g) $x + 2x^3 + 3x^5 + ... + nx^{2n-1} + ...$ h) $\dfrac{x^2}{1.2} - \dfrac{x^3}{2.3} + \dfrac{x^4}{3.4} - \dfrac{x^5}{4.5} + ...$

   i) $1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + ...$ j) $x + 2^3x^2 + 3^3x^3 + 4^3x^4 + ...$

   k) $4 + 5x + 6x^2 + 7x^3 + ...$ l) $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^8}{8} + \dfrac{x^{12}}{12} + ...$

   m) $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!}x + \dfrac{3}{4!}x^2 + ... + \dfrac{n}{(n+1)!}x^{n-1} + ...$ n) $\dfrac{1}{2!} - \dfrac{3}{4!}x^2 + ... + (-1)^{n-1}(2n-1)\dfrac{x^{2n-2}}{(2n)!} + ...$

2. Mediante o uso das somas das séries obtidas no exercício 1, calcule:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n-1)}$

3. Determine as expansões em séries de potências em torno de $x_0 = 0$ das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas:

   a) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ b) $\dfrac{1}{(1+x)^3}$

   c) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$

4. Verifique que

   a) $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$ b) $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$

   c) $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$ d) $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$

   e) $\operatorname{arctg} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \le 1.$

5. Utilize as séries desenvolvidas no exercício 4 para

   (a) Calcular e, com erro inferior a 10^{-5}.

   (b) Idem para $sen 1$.

   (c) Idem para $ln 2$ e $ln 3$

(d) Idem para $arctg(1/2)$ e $arctg(1/3)$

(e) Calcular $\dfrac{d^{320}}{dx^{320}}(arctg(0))$ e $\dfrac{d^{321}}{dx^{321}}(arctg(0))$

(f) Mostrar que e é irracional.

(g) Mostrar que $e^{ix} = cos + i\ sen\ x$.

6. Mostre que $\dfrac{\pi}{4} = arctg 1/2 + arctg 1/3$, usando a identidade $tg(x+y) = \dfrac{tg(x) + tg(y)}{1 - tgxtgy}$

7. Usando os exercícios 5 e 6, calcule $\dfrac{\pi}{4}$ com erro inferior a 10^{-5}.

8. Desenvolver em série de potências de x as seguintes funções e indicar os intervalos em que estes desenvolvimentos têm lugar e calcular $f(1)$ com erro inferior a 10^{-6}:

   a) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{sent}{t} dt$ b) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$

   c) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ d) $f(x) = \displaystyle\int_0^x sen(t^2)\ dt$

9. Ache a expansão em série de Taylor de cada uma das seguintes funções em torno de $x_0 = 0$. Ache também o intervalo de convergência das séries encontradas.

   a) $x^2 e^x$ b) $\cos\sqrt{x}$ c) $\operatorname{sen} x^2$

   d) $\cos^2 x$ e) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x - 2x^2}$ f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1+3x^2}\right)$

   g) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}$

   (Sugestão: Fatore o denominador)

10. Mostre que a função de Bessel

    $J_0(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^4}{2^2.4^2} - \dfrac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + ...$

    satisfaz a equação diferencial $xy'' + y' + xy = 0$.

11. Ache $\alpha \in I\!R$ tal que

    a) $\dfrac{cos\ x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)}{x^\alpha} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} L_1, \quad L_1 \neq 0, \infty.$

    b) $\dfrac{sen\ x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)}{x^\alpha} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} L_2, \quad L_2 \neq 0, \infty.$

MAT 2456 - CÁLCULO IV - POLI
Lista 3: Respostas

1. a) $-\ln(1-x)$ b) $ln(1+x)$ c) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

   d) $arctgx$ e) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ f) $\dfrac{x}{(1-x)^2}$

   g) $\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$ h) $(1+x)ln(1+x)-x$ i) $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$

   j) $\dfrac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$ k) $\dfrac{4-3x}{(1-x)^2}$ l) $\frac{-1}{4}ln(1-x^4)$

   m) $\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$

   n) $\dfrac{cosx+xsenx-1}{x^2}$

2. $ln2$; $\frac{3}{128}$; $\frac{6}{5}ln\frac{6}{5}-\frac{1}{5}$

3. a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n, \quad -1<x<1$

   b) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+2)(n+1)}{2}x^n, -1<x<1$

9. a) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{n!}, \quad x\in I\!R$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}, x\in I\!R$

   c) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}, \quad x\in I\!R$ d) $1+\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}2^{2n}}{(2n)!}2n, x\in I\!R$

   e) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1+(-1)^n 2^{n+1}}{3}\right)x^{n+1}, \dfrac{-1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$

   f) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{n}x^{2n}, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

   g) $2\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n+1}\right), -1<x<1$

11. a) $\alpha=6$ b) $\alpha=7$