

MAT 2456 - CÁLCULO IV - POLI - 2005

Lista 2 - Séries de Potências e mais Séries Numéricas

Justifique todas as afirmações

1. Determine o intervalo máximo de convergência de cada uma das séries de potências abaixo:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 + 1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1) \ln^2(n+1)}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(2n)!} (x-7)^n$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n} (x-e)^n$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x+3)^n$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$

k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} (x-4)^{2n}$

l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} x^n$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n4^n} x^n$

2. É conhecido que se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é uma série de potências, $a_n > 0 \forall n \geq n_0$ e

$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ então $R = 1/L$. Ache o raio de convergência para as séries seguintes e comente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{2n!}{(n!)^2}$

b) $\sum x^{2n} \frac{(2n!)}{(n!)^2}$

c) $\sum x^{n^2} \frac{(2n!)}{(n!)^2}$

d) $\sum x^n \frac{n!}{n^n}$

e) $\sum x^{3n} \frac{n!}{n^n}$

f) $\sum x^{n!} \frac{n!}{n^n}$

3. Calcular o intervalo de convergência de:

a) $\sum \frac{x^n}{(2 + (-1)^n)^n}$

b) $\sum \left(\frac{3n+2}{5n+7} \right)^n x^n$

c) $\sum \left(\frac{2^n+3}{3^n+2} \right) x^n$

d) $\sum \frac{x^n}{\ln n}$

e) $\sum \frac{(x+1)^n}{a^n + b^n} \quad b > a > 0$

4. Examine a convergência de:

a) $\sum \frac{1}{\ln n}$

b) $\sum \frac{1}{(\ln n)^2}$

c) $\sum \frac{1}{n^{\ln n}}$

d) $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

Solução : se $\ln n > 9 > e^2 \implies \ln n^{\ln n} > e^{2 \ln n} = n^2 \implies \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

e) $\sum \frac{1}{n^{\sqrt[3]{n^2+3}}}$

f) $\sum \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n^{\sqrt[3]{n^2+3}}} \right)$

g) $\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n^{\sqrt[3]{n^2+3}}} \right)$

5. Ex. teste da integral:

a) $\sum \frac{1}{1+n^2}$

b) $\sum \frac{1}{n \ln n}$

c) $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$

d) $\sum \frac{\ln^2 n}{n^2}$

e) $\sum \frac{\ln^2 n}{n^3}$

6. Converge ou diverge? Calcule o limite:

a) $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{4+a_n}$

b) $a_1 = 5, a_{n+1} = \sqrt{4+a_n}$

c) $a_1 = 1, a_{n+1} = \operatorname{sen}(a_n)$

7. Determine a convergência das seguintes seqüências:

a) $\sqrt[n]{\ln n}$

b) $n^{\frac{1}{\ln n}}$

c) $n^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}$

d) $\left(\frac{3n+2}{5n+7} \right)^n \left(\frac{5}{3} \right)^n$

e) $\left(\cos \frac{1}{n} \right)^n$

f) $\left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^2}$

g) $\frac{2^n + 3^n + 5^n}{2, 5^n + 3, 5^n + 1, 2^n}$

h) $\left(\sec \frac{1}{n} \right)^{n^2}$

8. Para quais valores de $\alpha > 0$ a série é convergente?

a) $\sum \operatorname{sen}^2 \left(\frac{1}{n^\alpha} \right)$

b) $\sum \ln^3 \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right)$

c) $\sum \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n^{2\alpha}}} - 2 \right)$

d) $\sum (e^{1/n^\alpha} - 1)$

9. Seja a_n definida por $\begin{cases} a_{2j} = \frac{1}{2^j} \\ a_{2j+1} = \frac{(-1)^j}{j} \end{cases}$. A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é alternada? A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge?

10. Seja a_n dada por $\begin{cases} a_{2j} = \frac{1}{j^3} \\ a_{2j+1} = -\frac{1}{j^2} \end{cases}$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é alternada? A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge? A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ verifica o C. de Leibniz?

11. Seja b_k definida por $\begin{cases} b_{2j} = \frac{1}{j} \\ b_{2j+1} = \frac{-1}{j^3} \end{cases}$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge?

12. Para quais valores de $k \in \mathbb{N}$ a série $\sum \frac{(n!)^k}{(kn)!}$ é convergente?

13. (a) Qual é a diferença entre uma seqüência e uma série?

(b) O que é uma série convergente? O que é uma série divergente?

(c) Explique o significado de se dizer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

14. Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos de $\sum b_n$ seja sabidamente convergente.

(a) Se $a_n > b_n$ para todo n , o que você pode dizer sobre $\sum a_n$? Por quê?

(b) Se $a_n < b_n$ para todo n , o que você pode dizer sobre $\sum a_n$? Por quê?

15. Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos de $\sum b_n$ seja sabidamente divergente.

(a) Se $a_n > b_n$ para todo n , o que você pode dizer sobre $\sum a_n$? Por quê?

(b) Se $a_n < b_n$ para todo n , o que você pode dizer sobre $\sum a_n$? Por quê?

16. Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge quando $x = -4$ e diverge quando $x = 6$. O que pode ser dito sobre a convergência ou divergência das séries a seguir?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-3)^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

17. Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, explique por quê. Se for falsa, explique por que ou dê um contra-exemplo.

- (a) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, então $\sum a_n$ é convergente.
- (b) Se $\sum c_n 6^n$ for convergente, então $\sum c_n (-2)^n$ é convergente.
- (c) Se $\sum c_n 6^n$ for convergente, então $\sum c_n (-6)^n$ é convergente.
- (d) Se $\sum c_n x^n$ diverge quando $x = 6$, então ela diverge quando $x = 10$.
- (e) O Teste da Razão pode ser usado para determinar se $\sum 1/n^3$ converge.
- (f) O Teste da Razão pode ser usado para determinar se $\sum 1/n!$ converge.
- (g) Se $0 \leq a_n \leq b_n$ e $\sum b_n$ divergir, então $\sum a_n$ diverge.
- (h) Se $-1 < \alpha < 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$
- (i) Se $\sum a_n$ for divergente, então $\sum |a_n|$ é divergente.
- (j) Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem divergentes, então $\{a_n + b_n\}$ é divergente.
- (l) Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem divergentes, então $\{a_n b_n\}$ é divergente.
- (m) Se $\{a_n\}$ for decrescente e $a_n > 0$ para todo n , então $\{a_n\}$ é convergente.
- (n) Se $a_n > 0$ e $\sum a_n$ convergir, então $\sum (-1)^n a_n$ converge.
- (o) Se $a_n > 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}/a_n) < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

18. Considere a série de potências $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Mostre que

- (a) Se existe $\beta > 0$ tal que $|a_n| \leq \beta, \forall n \geq 0$ então $R \geq 1$
- (b) Se existe $\alpha > 0$ tal que $|a_n| \geq \alpha, \forall n \geq 0$ então $R \leq 1$.
- (c) Se existem $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha \leq |a_n| \leq \beta, \forall n \geq 0$ então $R = 1$.
- (d) Se $|a_n| \leq \frac{1}{3^n}, \forall n \geq 0$ então $R \geq 3$

19. Calcule o raio e o intervalo de convergência das séries:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sen} n) x^n$
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n} x^n$