**MAT-2456 - Cálculo IV - 2005**

**Lista 1: Sequências e Séries Numéricas**

I) Decida se cada uma das sequências abaixo é convergente ou divergente, calculando o limite no caso convergente.

1) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, ...$

2) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, ...$

3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}, ...$

4) $a_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

5) $c_k = \dfrac{\sqrt{k}+1}{k-1}, \quad k = 2, 3, ...$

6) $a_n = \dfrac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$

7) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

8) $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

9) $a_n = \dfrac{2n}{n+1} - \dfrac{n+1}{2n}$

10) $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$

11) $a_n = \dfrac{sen\ n}{n}$

12) $a_n = \text{sen}\ n;\ b_n = \text{sen}\ (\ n\ \pi);\ c_n = \text{sen}\ n\frac{\pi}{2}$

13) $a_n = \dfrac{2n + sen\ n}{5n+1}$

14) $a_n = \dfrac{(n+3)! - n!}{(n+4)!}$

15) $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$

16) $a_n = \dfrac{n\ sen(n!)}{n^2+1}$

17) $a_n = \dfrac{3^n}{2^n + 10^n}$

18) $a_n = \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$

19) $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

20) $a_n = na^n, \quad a \in I\!R$

21) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

22) $a_n = n - n^2\ sen\ \dfrac{1}{n}$

23) $a_n = (-1)^n + \dfrac{(-1)^n}{n}$

24) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n} \quad$ onde $\ 0 < a < b$

25) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) ... \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

26) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) ... \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

27) $a_n = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$

28) $a_n = \sqrt[n]{n}$

29) $a_n = \dfrac{n^\alpha}{e^n}, \ \alpha \in I\!R$

30) $\dfrac{ln(n)}{n^a}, \ a > 0.$

31) $a_n = \sqrt[n]{n!}$

32) $a_n = \sqrt[n]{a}, \ a > 0$

33) $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$

34) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

35) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

36) $\left(\dfrac{3n+5}{5n+11}\right)^n$

37) $\left(\dfrac{3n+5}{5n+1}\right)^n \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$

38) $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

II) Verifique que existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ se:

1) $a_n = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$

2) $a_n = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{2.4.6...(2n)}{1.3.5...(2n-1)}$

III)

1) Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números positivos e seja $\alpha$ um número positivo. Mostre que, se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\alpha} = 0$.

IV)

1) Seja $A \subset \mathbb{R}$ e seja $f : A \to A$ uma função contínua em $a \in A$. Seja $\{a_n\}_{n\in N}$ uma sequência definida por: $a_\circ \in A$ e $a_{n+1} = f(a_n)$, para todo $n \geq 0$. Suponha que $a_n \to a$. Prove que $f(a) = a$.

2) Considere a sequência $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ...

a) Verifique que a sequência é crescente e limitada superiormente por 2.

b) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

3) Mostre que a sequência $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... converge para 2.

4) Calcule $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdots}}$.

V) Verifique a convergência ou divergência das seguintes sequências:

1) $s_n = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^3}$

2) $s_n = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{e^r}$

3) $s_n = \displaystyle\sum_{r=3}^{n} \frac{1}{ln\ r}$

4) $a_n = \dfrac{2.4.6.\ ...(2n)}{1.3.5.\ ...(2n-1)}$

5) $a_n = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$

Calcule o limite nos casos 2) e 5).

VI) Decida se cada uma das séries abaixo é convergente. Se possível, calcule sua soma.

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n} + 2^n\right)$

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, t^{\frac{k}{2}}$ para $0 < t < 1$

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u^n(1+u^n)$ para $|\, u \,| < 1$

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos n\,\frac{\pi}{2}$ para $|\, x \,| < 1$

5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} sen^{2n}x$ para $|\, x \,| < \frac{\pi}{2}$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{n}{j}\right)$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)$

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{sen\ k}$

10) $\displaystyle\sum_{s=1}^{\infty} \ cos\ \frac{1}{s}$

11) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+cos\ k}{k}$

VII) É convergente ou divergente? Justifique.

1) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-4}}$

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{arctg\ n}{n^2}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^{\lambda}} \qquad \lambda > 0$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$

6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{ln\ n}{n}$

7) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{ln\ n}}$

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n^3+3}\ \sqrt[5]{n^3+5}}$

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - cos\ \frac{1}{n}\right)$

10) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(ln\ n)^n}$

11) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{ln\ n}{n^2}$

12) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{ln\ n}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R} \ \ p > 0$

13) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right), \quad p > 0$

14) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n}\ ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$

16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$

17) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^k}$

18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(ln\ 2)^n}$

VIII) Decidir se a série converge absolutamente, condicionalmente ou diverge.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+1}{n^3+3}$

4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{ln\ n}$

5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{ln\ n}{n}$

6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ ln^2 n}$

7) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{ln\ n}$

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \; sen \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R},\; p > 0$

10) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

IX) Expresse as seguintes representações decimais como quociente de 2 inteiros

1) $1,\overline{29}$

2) $0,3\overline{117}$

X) Para cada $n$, seja $a_n$ um dos dígitos 0,1,2,...,9. Mostre que a série

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...$$

é convergente.

XI) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números positivos tal que $\sum a_n$ diverge. Mostre que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ também diverge.

XII) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, calcule $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$.

XIII) Verificar as seguintes relações:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n)] = \lim_{n\to\infty} f(n) - f(1)$, se o limite existir.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n-1)] = \lim_{n\to\infty} [f(n) + f(n+1)] - f(0) - f(1)$, se existir o limite.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left( \frac{n}{n+2} \right)$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{1}{n} \right) - \text{sen} \left( \frac{1}{n+1} \right)$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\;...\;(n+k)} \quad k \geq 2.$

XIV) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as séries convergem.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1 + x^n)$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n cos \frac{n\pi}{2}$

3) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{ln\; x}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( x^n + \frac{1}{2^n x^n} \right)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \; sen \; x}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5} x^{2n}$

## RESPOSTAS

I) Respostas

1) converge para 1
2) diverge
3) diverge
4) converge para 2
5) converge para 0
6) converge para $\frac{1}{4}$
7) converge para 0
8) converge para 1
9) converge para $\frac{3}{2}$
10) converge para $\frac{1}{2}$
11) converge para 0
12) $a_n$ e $b_n$ divergem ; $b_n \to 0$
13) converge para $\frac{2}{5}$
14) converge para 0
15) converge para 1
16) converge para 0
17) converge para 0
18) converge para e
19) converge para 0
20) converge para 0 se $0 <| a |< 1$, diverge para $\infty$ se $a \geq 1$, diverge se $a \leq -1$
21) converge para 0
22) converge para 0
23) diverge
24) converge para b
25) converge para 0
26) converge para $\frac{1}{2}$
27) converge para 0
28) converge para 1
29) converge para 0, $\alpha \in \mathbb{R}$
30) converge para 0
31) diverge
32) converge para 1
33) $1/e$
34) $+\infty$
35) 1
36) 0
37) exp(22/15)
38) 1

IV) Respostas

1) 2
3) 2

V) Respostas

1) converge
2) converge para $\frac{1}{e-1}$
3) diverge
4) diverge. Dica: calcular $lna_n$
5) converge para 0. Dica: calcular $lnan$

VI) Respostas

1) diverge
2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{t}}$
3) $\dfrac{2+u}{1-u^2}$
4) $\dfrac{1}{1+x^2}$
5) $\dfrac{1}{1-sen^2x}$
6) diverge
7) diverge
8) diverge
9) diverge
10) diverge
11) diverge

VII) Respostas

1) diverge
2) converge
3) converge
4) converge
5) diverge
6) diverge
7) converge
8) converge
9) converge
10) converge
11) converge
12) converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$
13) converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$
14) diverge
15) diverge
16) diverge
17) converge
18) diverge
19) diverge

VIII) Respostas

1) converge condicionalmente
2) converge absolutamente
3) converge condicionalmente
4) converge condicionalmente
5) converge condicionalmente
6) converge absolutamente
7) diverge
8) diverge
9) converge absolutamente se $p > 1$
converge condicionalmente se $p \leq 1$
10) converge absolutamente
11) converge condicionamente

XII) $2s - a_1$.

XIII) 3) 1; 4) $\ln 2$; 5) sen (1) 6) converge para 1; 7) converge para $\dfrac{1}{k!(k-1)}$

XIV)

1) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$
2) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$
3) $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$
4) $\{x = 0\}$
5) $\{x \in \mathbb{R} : 1/2 < |x| < 1\}$
6) $\{x \in \mathbb{R} : 2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
7) $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$