MAT0334 - Análise Matemática II
1^o Semestre de 2011 - 1^a Lista

1- Seja V um espaço vetorial com produto interno sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Mostre que, para quaisquer $u, v \in V$,

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

b) Se V é um espaço vetorial real, então

$$< u, v >= \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2),$$

para quaisquer $u, v \in V$.

c) Se V é um espaço vetorial complexo, então

$$< u, v >= \frac{1}{4}[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i(\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2)],$$

para quaisquer $u, v \in V$.

Nota: *A identidade do item a) é chamada identidade do paralelogramo e as identidades dos ítens b) e c) são chamadas identidades de polarização.*

2- Sejam V um espaço vetorial complexo e $<,>: V \times V \to \mathbb{C}$ uma aplicação sesquilinear, isto é,

$$< \alpha u + v, w >= \alpha < u, w > + < v, w >$$
$$< w, \alpha u + v >= \overline{\alpha} < w, u > + < w, v >$$

para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Mostre que se $< v, v >\in \mathbb{R}$ para todo $v \in V$, então $< u, v >= \overline{< v, u >}$ para todos $u, v \in V$

3- Considere o espaço normado $V = (\mathcal{C}[0,1], \|.\|_2)$, onde

$$\|f\|_2 = (\int_0^1 |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

e (f_n) sequência de funções em V dada por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -nx + \frac{n}{2} + 1, & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0, & \text{se} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

a) Mostre que (f_n) é uma sequência de Cauchy.

b) Mostre que (f_n) não converge em V.

4- Mostre que a norma $\|.\|_\infty$ em $\mathcal{C}[0,1]$ não provém de um produto interno.

5- Mostre que, em um espaço vetorial normado, a norma provém de um produto interno se e somente se vale a lei do paralelogramo.