MAT 5822 (K-Teoria para Álgebras de Operadores)
IME-USP, Primeiro Semestre de 2012
Lista de Exercícios

H sempre denotará um espaço de Hilbert e $B(H) = \{\text{operadores limitados em } H\}$. Uma *projeção* numa C*-álgebra é um idempotente auto-adjunto.
Denotamos por $\sigma(a)$ o espectro de um elemento a de uma C*-álgebra. Se A não tiver unidade, $\sigma(a)$ então denota o espectro de a na unitização $A^\sim$ de A.

(1) Seja A uma C*-álgebra com unidade, seja $\varphi : A \to B(H)$ um *-homomorfismo injetor e seja M a imagem de $p = \varphi(1)$. Mostre que M é um sub-espaço fechado de H e que

$$A \ni a \longmapsto p\varphi(a)|_M \in B(M)$$

é um *-homomorfismo unital injetor.

(2) Demonstre a seguinte generalização do Lema 2.2.3 de [1]: Se x é um elemento normal de uma C*-álgebra unital A e $\|a - x\| = \delta$, $a \in A$, então

$$\sigma(a) \subseteq \{\lambda_1 + \lambda_2;\ \lambda_1 \in \sigma(x),\ |\lambda_2| \leq \delta\}.$$

(3) Seja A uma C*-álgebra sem unidade e seja $a \in A$ um elemento normal. Dada $f \in C(\sigma(a))$, mostre que $f(a) \in A$ se, e somente se, $f(0) = 0$

(4) (a) Seja A uma C*-álgebra e seja $v \in A$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes: (i) v^*v é uma projeção, (ii) vv^* é uma projeção e (iii) $v = vv^*v$. Um elemento de A que satisfaça estas três condições é chamado de *isometria parcial*. Se, além disto, A é unital e $v^*v = 1$, diz-se que v é uma *isometria*.
(b) Considere agora o caso em que a álgebra é $B(H)$. Mostre que $T \in B(H)$ é uma isometria parcial se, e somente se, $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in (\ker T)^\perp$. Mostre que, se $T \in B(H)$ é uma isometria parcial, então T^*T é a projeção ortogonal sobre $(\ker T)^\perp$ e TT^* é a projeção ortogonal sobre a imagem de T (que é fechada). Mostre que T é uma isometria se, e somente se, $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in H$.

(5) Seja A um anel com unidade. Dado um idempotente $P \in M_k(A)$, consideremos

$$\Xi_P = \left\{ P \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix};\ a_1, a_2, \cdots, a_n \in A \right\},$$

onde $\cdot$ denota produto de matrizes. Dados idempotentes $P \in M_k(A)$ e $Q \in M_l(A)$, mostre que os A-módulos à direita Ξ_P e Ξ_Q são isomorfos se, e somente se, existem matrizes retangulares com entradas em A (dos tamanhos apropriados) U e V tais que $P = UV$ e $Q = VU$.

(6) Seja A uma C*-álgebra. Mostre que $M_2(A)^\sim$ é isomorfa a uma C*-subálgebra de $M_2(A^\sim)$

(7) Sejam p e q projeções de $M_k(\mathbb{C})$. Mostre que

$$p \sim q \iff p \sim_u q \iff p \sim_h q \iff \text{posto}(p) = \text{posto}(q).$$

(8) Dado A um anel com unidade, A-módulo à direita é projetivo e finitamente gerado se, e somente se, ele é isomorfo a Ξ_P para algum idempotente $P \in \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k(A)$. Esta afirmação é um teorema, por exemplo, em [2]. Por conveniência, aqui podemos considerá-la como um definição. Denotando por $M(A)$ o conjunto das classes de isomorfismo dos A-módulos à direita projetivos e finitamente gerados, mostre que a soma direta de módulos induz em $M(A)$ uma estrutura de semigrupo abeliano isomorfo ao semigrupo $V(A)$ do Exercício 3.10 de [1].

(9) Seja X um espaço topológico Hausdorff e compacto e seja $\pi : E \to X$ um fibrado vetorial sobre X (tal como definido em [1, Seção 3.3.7]). Uma *seção* de π é uma aplicação $s : X \to E$ tal que $\pi \circ \pi$ é igual à identidade.

(a) Mostre que o conjunto $M(E)$ das seções contínuas de π pode ser canonicamente munido da estrutura de $C(X)$-módulo á direita e que $M(E)$ é projetivo e finitamente gerado.

(b) Usando o isomorfismo canônico $M_k(C(X)) \cong C(X, M_k(\mathbb{C}))$ como uma identificação, para cada idempotente $P \in M_k(C(X))$, defina

$$E_P = \{(x, v) \in X \times \mathbb{C}^k;\ \exists w \in \mathbb{C}^k \text{ tal que } P(x) \cdot w = v\}.$$

Mostre que $\pi : E_P \to X$, $\pi(x, v) = x$, é um fibrado vetorial sobre X e que o $C(X)$-módulo de suas seções contínuas $M(E_P)$ é isomorfo a Ξ_P (veja exercício acima).

(c) Um homomorfismo do fibrado $\pi : E \to X$ no fibrado $\tilde{\pi} : F \to X$ é uma aplicação contínua $\phi : E \to F$ tal que $\tilde{\pi} \circ = \pi$ e tal que a restrição de ϕ a cada $\pi^1(\{x\})$, $x \in X$, é linear. Mostre que $M(\phi) : M(E) \to M(F)$, $M(\phi)(s) = \phi \circ s$, é um homomorfismo de $C(X)$-módulos.

(d) Mostre a categoria dos $C(X)$-módulos projetivos e finitamente gerados é equivalente á categoria dos fibrados vetoriais sobre X e que a equivalência preserva somas diretas. Conclua então que $K_0(C(X)$ é isomorfo ao grupo universal associado ao semigrupo (adição induziada por soma direta de fibrados) das classes de isomorfismos de fibrados vetoriais sobre X.

(10) Seja $B = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leq 1\}$. Mostre que $K_0(C(B))$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$ e que $[\mathbf{1}]_0$ gera $K_0(C(B))$, onde $\mathbf{1}$ denota a função constante igual a 1.

Referências

[1] M. Rordam, F. Larsen & N. J. Laustsen. An Introduction to K-Theory for C*-Algebras. Cambridge University Press 2000.

[2] Jacobson. Basic Algebra II.