Pós-graduação em Matemática do IME-USP

MAT 5716 - Introdução às Equações Diferenciais Parciais

2ª Prova, 2 de dezembro de 2009

1	
2	
3	
4	
Total	

Nome : ______________________________

Professor: Severino Toscano do Rego Melo

1^a Questão: Dado Ω, um aberto de $\mathbb{R}^n$, sejam $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $a \in C^\infty(\Omega)$.

(a) Mostre que a aplicação $C_c^\infty(\Omega) \ni \phi \mapsto u(a\phi) \in \mathbb{C}$ é uma distribuição em Ω. Denotemos esta distribuição por au.

(b) Mostre que $\partial_j(au) = (\partial_j a)u + a(\partial_j u)$.

(c) Mostre que, se $a(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$, então o suporte singular de au é igual ao suporte singular de u.

2^a Questão: Mostre que toda função harmônica e limitada em $\mathbb{R}^n$ é constante. Tome como ponto de partida o seguinte fato. Se u é uma função harmônica em uma vizinhança de $\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq a\}$, então, para $|\xi| < a$, temos

$$u(\xi) = \frac{1}{a\omega_n} \int_{|x|=a} \frac{a^2 - |\xi|^2}{|x - \xi|^n}\, u(x)\, dS_x.$$

3^a Questão: Dado Ω, um aberto de $\mathbb{R}^n$, seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma solução de $\Delta u + c(x)u = 0$, onde $c(x) < 0$ em Ω. Mostre que, se u se anula na fronteira de Ω, então u é nula.

4^a Questão: Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo $|f(x)| \leq Me^{a|x|^2}$ para todo x e para certas constantes positivas M e a. Mostre que a fórmula

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} \int e^{-|x-y|^2/4t} f(y)\, dy$$

define uma solução da equação do calor em $\{(x,t);\ x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < t < 1/4a\}$.