Pós-graduação em Matemática do IME-USP

MAT 5716 - Introdução às Equações Diferenciais Parciais

1ª Prova, 7 de outubro de 2009

1	
2	
3	
Total	

Nome : ____

Professor: Severino Toscano do Rego Melo

1^a **Questão**: Mostre que a equação $u_{tt} = u_{xx} + \frac{3}{2}u_{tx}$ é hiperbólica, ache as características, e resolva o resolva explicitamente o problema de Cauchy com condições iniciais $u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = g(x)$. Especifique condições sobre f e g para que o problema tenha solução única em $C^2(\mathbb{R}^2)$.

2^a **Questão**: Dadas $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$ e $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$, mostre que $u(x,t) = tM_g(x,ct) + \frac{\partial}{\partial t}(tM_f(x,ct))$ define função na classe $C^2(\mathbb{R}^4)$ que é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\Delta_x u \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Faz parte do problema definir M_f e M_g. Use sem demonstrar que, se $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$, então

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)M_h(x,r) = \Delta_x M_h(x,r).$$

3^a **Questão**: Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $(x_0,y_0) \in U$, a, b e c funções reais pertencentes a $C^3(U)$. Mostre que, se $a(x_0,y_0)c(x_0,y_0) - b(x_0,y_0)^2 < 0$, então existe um aberto V contendo (x_0,y_0) e existem ϕ_1 e ϕ_2 pertencentes a $C^1(V)$, cujos gradientes são linearmente independentes em todos os pontos de V, e que resolvem a equação $a(x,y)\phi_x^2 + 2b(x,y)\phi_x\phi_y + c(x,y)\phi_y^2 = 0$. Onde você usa que a, b e c são de classe C^3? Qual a relevância deste problema?

Dicas e sugestões para a 3^a Questão:

1) As hipóteses implicam que existem funções reais λ, η, u_1, u_2, v_1 e v_2 de classe C^3 definidas em um aberto contendo (x_0,y_0), com λ e η positivas, tais que, para cada $(x,y) \in V$, $u(x,y) = (u_1(x,y), u_2(x,y))$ e $v(x,y) = (v_1(x,y), v_2(x,y))$ são autovetores da matriz $A(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) & b(x,y) \\ b(x,y) & c(x,y) \end{pmatrix}$ com autovalores $\lambda(x,y)$ e $-\eta(x,y)$, respectivamente; além disso, $\{u(x,y), v(x,y)\}$ é um conjunto ortonormal.

2) Note que, em cada ponto, os vetores $w_+ = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}u + \frac{1}{\sqrt{\eta}}v$ e $w_- = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}u - \frac{1}{\sqrt{\eta}}v$ são anulados pela forma quadrática associada à matriz A.

3) Escreva problemas de Cauchy não-característicos para a equação

$$F(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y) = 0,$$

com $F(x,y,z,p,q) = a(x,y)p^2 + 2b(x,y)pq + c(x,y)q^2$. Comece fixando uma curva inicial $(x(s),y(s))$, que pode ser um segmento de reta, por exemplo. Daí, determine condições iniciais admissíveis para p e q usando os resultados de álgebra linear citados acima. Escolha por último a condição inicial para ϕ.