MAT 5716 - Introdução às Equações Diferenciais Parciais
IME-USP, Segundo Semestre de 2009
Quinta Lista

- (1) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}^n$. Suponha que existam constantes $M > 0$ e $a > 0$ tais que $|f(x)| \leq M e^{a|x|^2}$ para todo x . Mostre que

$$u(x, t) = \begin{cases} \int K(x, y, t) f(y) dy, & \text{se } 0 < t < 1/4a \\ f(x), & \text{se } t = 0 \end{cases},$$

onde K denota o núcleo do calor, define função contínua em $\mathbb{R}^n \times [0, 1/4a)$, de classe C^∞ e satisfazendo $u_t = \Delta_x u$ em $\mathbb{R}^n \times (0, 1/4a)$.

- (2) Mostre que a função

$$E(x, t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases},$$

pertence a $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e é uma solução fundamental para o operador do calor em $\mathbb{R}^{n+1}$.